

丘成桐中学数学奖
推荐参考书

# 著名几何问题及其解法：
## 尺规作图的历史
# Famous Problems of Geometry and How to Solve Them


B. 波尔德 著
郑元禄 译





高等教育出版社
Higher Education Press

几何三大难题困扰了人类2000多年，让许多伟大的数学家为之辛勤地思考并耗费大量的精力，人类也在解决他们的过程中发展了新的数学。因此了解这些问题以及了解这些问题是如何解决的，对学数学的人和对数学感兴趣的中学生来说是很有意义的。

本书以很少的篇幅，从历史的发展的角度展开，穿插了一些历史资料和生动的故事。另外作者设计了一系列的习题，让读者参与到问题的解决中去。本书自1969年出版以来，直到现在仍是一本很受读者欢迎的读物。

本书适合对此感兴趣的大学生，中学教师，以及有较好代数和几何基础的中学生等阅读。

ISBN 978-7-04-025382-5




定价 15.00 元

■ 学科类别：数学

网址：academic.hep.com.cn



丘成桐中学数学奖

推荐参考书

# 著名几何问题及其解法：

## 尺规作图的历史

## Famous Problems of Geometry and How to Solve Them

■ B. 波尔德 著

■ 郑元禄 译



高等教育出版社

Higher Education Press

**图书在版编目 (CIP) 数据**

著名几何问题及其解法: 尺规作图的历史 / (美) 波尔德 (Bold, B.)著; 郑元禄译. —北京: 高等教育出版社, 2008.10

书名原文: Famous Problems of Geometry and How to Solve Them

ISBN 978-7-04-025382-5

I. 著… II.①波… ②郑… III. 几何学—普及读物 IV. 018-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 143179 号



**策划编辑** 王丽萍 **责任编辑** 王丽萍 **封面设计** 王凌波
**责任印制** 陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010-58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **免费咨询** | 800-810-0598 |
| **邮政编码** | 100011 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 北京七色印务有限公司 | **畅想教育** | http://www.widedu.com |
| **开　　本** | 889×1194　1/32 | **版　　次** | 2008 年 10 月第 1 版 |
| **印　　张** | 3.75 | **印　　次** | 2008 年 10 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 72 000 | **定　　价** | 15.00 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。



**物 料 号　25382-00**

# 丛书序

任何科技发展都不能缺乏数学作为根基,数学在科技年代,地位日益重要.而教育的目的不仅要学生懂得书本上介绍的基本知识,也需要培养学生应变、创新和领导的能力.学习基本知识可以在不断的考试中磨炼出来,我想这方面中国的学生在考试里面磨炼不少了,至于应变、创新和领导能力,恐怕单从考试是不够的.为激发全球华人青少年对数学的兴趣,提升他们的学术水平,并及早发掘与培养全世界的华人数学英才,由我和泰康人寿保险股份有限公司共同主办的“丘成桐中学数学奖”竞赛于 2008 年在北京正式启动.第一届“丘成桐中学数学奖”颁奖仪式定于 2008 年 10 月 24 日在北京举行,届时,美国哈佛大学、布朗大学、斯坦福大学等名校的本科招生主任将会出席仪式,并面试部分

获奖学生.

为了配合这项活动,我们精心挑选了国外一批著名的数学科普读物,由高等教育出版社组织翻译并以丛书的形式出版. 这套丛书作为 “丘成桐中学数学奖” 的重要参考材料,涵盖了数学的各个分支学科,集知识性、趣味性于一体,对促进中学生的思维和创新能力都有很大的帮助. 希望同学们能从中汲取知识,开阔视野,在比赛中取得优异的成绩.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2008 年 8 月

献给我的妻子: Claire

是她的帮助和鼓励, 使本书最终成稿

# 序言

1963 年 6 月, 美国政治与社会科学研究院主办了一次关于数学与社会科学的讨论会. 会上提交论文的作者之一奥斯卡 · 摩尔根特恩 (Oscar Morgenstern) 曾与约翰 · 冯 · 诺依曼 (John Von Neumann) 一起撰写了《博弈论与经济行为》(*Theory of Games and Economic Behavior*) 一书. 该书促进了数学在解决经济学问题中的应用, 导致了数学 "博弈论" 的发展. 摩尔根特恩博士在这次讨论会上发表的论文被称为 "数学在经济学

中应用的极限”. 我援引这篇论文的第一段:

> 虽然人类智慧得出的一些深刻见解以否定的形式得以最好的陈述, 但是以绝对的方式来讨论应用的极限是极危险的. 这些见解包括不可能存在永动机, 光速不能被超过, 只用直尺与圆规不能化圆为方、不能三等分角等等. 这些命题中的每一个都是大量脑力劳动的成果. 所有的命题都是基于几百年的研究工作, 或者依据大量的经验证据, 或者依据新数学的发展, 或者二者兼而有之. 虽然是以否定的形式表述的, 但是这些命题和其它的发现都是真正的成就, 并且是对人类知识的巨大贡献. 所有这些都涉及数学推理, 某些知识实际上属于纯粹数学范围, 纯粹数学富有大量禁令性的与不可能性的命题.

以上引文明确而有力地说明了本书的宗旨. 为什么数学有大量禁令性与不可能性的命题? 为什么像 “化圆为方” 与 “三等分角” 这样的问题的求解, 被认为是 “深刻的见解” 与 “对人类知识的巨大贡献”? 为什么为了解答这些看上去十分简单的问题, 需要几百年大量的脑力劳动? 最后, 为了解答这些问题, 必须发展怎样的新的数学? 我希望当你读完本书后, 将找到这些问题的答案.

希腊数学家们的杰出成就是建立了公设系统. 尽管古代希腊人想出的欧几里得 (Euclid) 几何学有瑕疵, 有

缺点, 但是他们的工作直到今天都还是应遵循的样板.

在公设系统中, 人们从一组未被证明的命题 (公设) 出发, 推导出 (用逻辑方法) 其它命题 (定理). 欧氏平面几何学的两个公设是:

1) 已知任意两个不同点, 存在一条经过这两点的唯一直线.

2) 已知一点与一个长度, 可作以此已知点为圆心及以已知长度为半径的一个圆.

这两个公设构成了欧氏作图 (只用无刻度的直尺与圆规的作图) 的基础. 利用这两种工具, 古代希腊数学家能够完成很多作图, 但是他们在很多情况下失败了例如他们能平分任意一角, 但不能三等分一般角. 他们能作一个正方形使面积等于已知正方形面积的 2 倍, 但不能作 " 立方倍积". 他们能作一个正方形使面积等于已知多边形的面积, 但不能作 "化圆为方". 他们能作正 3,4,5,6,8,10 边形, 但不能作正 7,9 边形. 在 19 世纪末以前, 数学家们提供了所有这些古代数学问题的答案. 本书的目的是说明这些问题最后怎样被解答了.

为什么古代希腊数学家不能解答这些问题呢? 为什么事隔将近两千年后这些问题才得到解答呢?

希腊人的数学研究工作沿着几何路线进行. 他们专注于几何学而忽视代数学, 是由于下列原因:

毕达哥拉斯定理 (勾股定理) 告诉我们, 如果正方形的边长为 1 单位, 那么对角线长为 $\sqrt{2}$ 单位. $\sqrt{2}$ 是什么类型的数? 直到那个时候, 希腊数学家只能把所有解答用整数表示. 分数或有理数是一对有序整数, 即形如

$a/b$ 的数, 其中 $a$ 与 $b$ 是整数, $b \neq 0$. 无论如何尝试, 希腊人不能用整数表示 $\sqrt{2}$. 我们现在已经知道, 可以证明 $\sqrt{2}$ 是无理数. 但是直到 19 世纪, 还没有出现令人满意的无理数理论.

由于没有这样的理论,所以希腊数学只沿着几何方向发展. 例如希腊人想展开 $(a+b)^2$, 他们在几何上是按以下方法进行的:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

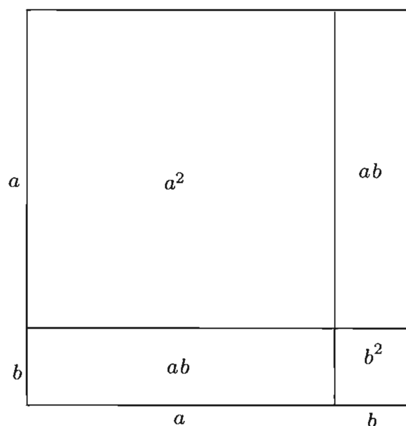



图 1

正如我们以后将指出的那样, 作图问题的解决涉及发展良好的代数技巧. 事实上, 一直到 17 世纪韦达 (Vieta)、笛卡儿 (Descartes) 与费马 (Fermat) 等人发展了代数学与解析几何学,才得到能够成功解决一些作图问题的方法.

# 目　录

# 第 I 章　古希腊的成就

---

利用几何学定理, 希腊数学家们能作出任何要求的几何元素, 这些元素是由已知元素作有限次有理运算与求实数平方根得出的. 例如: 假设我们已知元素 $a, b$ 与单位元素. 希腊人能作出 $a+b, a-b, a\cdot b, a/b, a^2$ 与 $\sqrt{a}$.

## 问题　I–A 组

利用已知线段作 $a+b$ 与 $a-b$. 图 2 说明怎样作 $a\cdot b$. 如果作 $EG//DF$, 那么 $x=a\cdot b$.

## 问题　I–B 组

1. 证明 $x=a\cdot b$.
2. 利用类似的方法作 $a^2, a/b, a^2/b$.

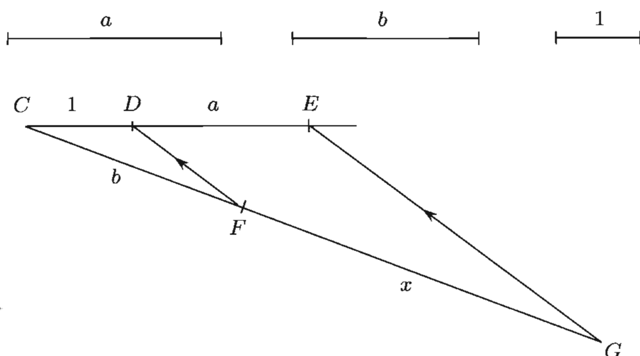



图 2

图 3 说明怎样作 $\sqrt{a}$.

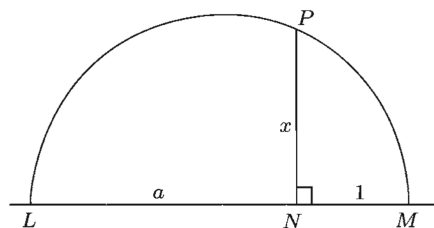



图 3

以 $LM$ 为直径作半圆. $NP \perp LM$ ($P$ 是垂线与半圆的交点). 于是 $x = \sqrt{a}$.

## 问题　I–C 组

1. 利用上图, 证明 $x = \sqrt{a}$.

2. 利用类似的方法, 作

$$\sqrt{ab}, \quad \sqrt[4]{a}, \quad \sqrt[8]{a}.$$

3. 利用勾股定理, 作线段分别等于

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt{17}.$$

利用这些作图, 如果将方程的系数作为已知线段的长度, 那么希腊人能作出一次方程与二次方程的各个根.

## 问题 I–D 组

作方程 $ax+b=c$ 的根, 其中 $a,b,c$ 是已知线段.

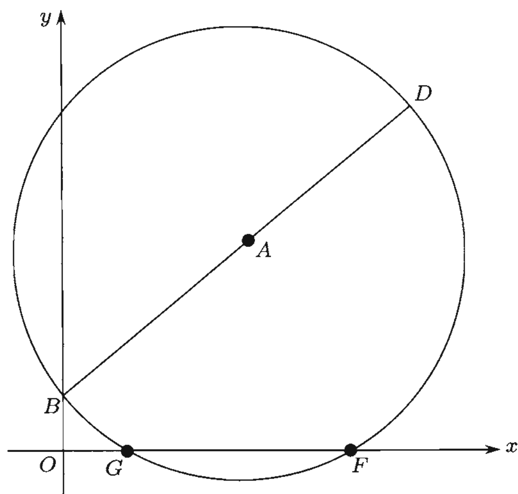



图 4

为作出二次方程 $x^2 - ax + b = 0\,(a^2 > 4b)$ 的根, 可以进行如下: 连接点 $B(0,1)$ 与 $D(a,b)$ 成线段 $BD$, 以 $BD$ 为直径作圆. 于是 $G$ 与 $F$ (圆与 $x$ 轴的交点) 的横坐标是二次方程的根 (如图 4).

## 问题　I–E 组

1. 我们为什么利用限制条件 $a^2 > 4b$?

2. 证明 $G$ 与 $F$ 的横坐标是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的根. 提示: 证明圆的方程是

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

正如序言中所指出, 希腊人利用本章所述的基本作图, 在作图题方面获得了相当大的成就. 但是他们仍旧留下若干未解决的问题, 让后代数学家们为之努力. 本书的其余部分将介绍企图解决这些问题与 19 世纪最后解决这些问题的简要历史.

## 问题　I–F 组

已知单位长度, 作方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的正根.

# 第 II 章　可作图性的解析准则

为了回答“用无刻度的直尺与圆规能作怎样的图形?”的问题必须建立可作图性的解析准则. 每个作图题都提出一些已知元素 $a, b, c, \cdots$, 并要求我们求出另一些元素 $x, y, z, \cdots$. 问题的各个条件能使我们建立一个或者一些方程, 使其系数是表示已知元素 $a, b, c, \cdots$ 的数. 方程的解容许我们用已知元素表示未知元素. 举一个简单的例子, 假设我们要作一个正方形, 使面积等于边长为 $a$ 的已知正方形面积的 2 倍. 在代数上, 我们把这个问题用下列方程表示:

$$x^2 = 2a^2.$$

当然另一些问题将得出较高次的方程.

我们已经看出, 怎样能作一次方程或二次方程的

根. 我们现在将研究次数高于 2 的方程的根作图的可能性, 特别对 3 次方程的根感兴趣.

首先我们知道, 如果元素能由已知元素作有限次有理运算 (加法, 减法, 乘法与除法) 和求实数平方根得出, 那么任何这样的几何元素就能作出. 现在我们来考虑相反的情形. 如果图形能作出, 那么所求元素与已知元素之间的关系是什么? 容易看出, 当确定所求元素的各个数能由已知元素作有限次有理运算与求实数平方根得到时, 这样的作图才是可能的.

任何作图包括一系列步骤, 并且每一步是下列诸步之一:

1. 在两点之间作一直线.

2. 以已知圆心与已知半径作一圆.

3. 求 2 条直线的交点, 求两圆的交点, 或者求一条直线与一圆的交点.

假设我们已知有 2 条坐标轴, 一个单位长度, 并且已知元素可用有理数表示. 我们知道, 2 个有理数的和、差、乘积与商 (除以 0 总是被排除) 是有理数. 这就说有理数关于 4 种初等运算构成一个闭集. 关于这 4 种运算封闭的任一数集称为域. 我们用 $F_0$ 表示有理数域.

如果我们已知两点的坐标

$$P_1(x_1, y_1) \quad 与 \quad P_2(x_2, y_2),$$

那么通过 $P_1, P_2$ 的直线方程是

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0,$$

或者

$$ax + by + c = 0,$$

其中

$$a = y_2 - y_1; b = x_1 - x_2; c = x_2y_1 - x_1y_2.$$

注意, 由定义知, $x_1, x_2, y_1$ 与 $y_2$ 是有理数. 于是 $a, b$ 与 $c$ 也是有理数.

圆心为 $(h, k)$, 半径为 $r$ 的圆的方程是

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

或者

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0,$$

其中 $d = -2h, e = -2k$ 与 $f = h^2 + k^2 - r^2$. 另外, $d, e$ 与 $f$ 是有理数. 求 2 条直线的交点的坐标只涉及对变量系数作有理运算, 但是求一条直线与一圆的交点的坐标, 或者求 2 个圆的交点坐标, 除了涉及有理数运算外, 还涉及求平方根. 为了总结一下, 我们可以叙述为: 当且仅当确定所求元素的数能由已知元素作有限次有理运算与求平方根得出时, 用无刻度的直尺与圆规作图才是可能的.

## 问题　II–A 组

求下列各组的交点的坐标:

(a) $ax + by + c = 0$　与　$a'x + b'y + c' = 0$

(b) $ax + by + c = 0$ 与 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

(c) $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 与 $x^2 + y^2 + d'x + e'y + f' = 0$

如果我们已知单位长度,那么所有有理数,即 $F_0$ 中所有的数都能作出. 并且,如果 $k$ 是 $F_0$ 中一固定数,那么我们能作 $\sqrt{k}$ 与 $a + b\sqrt{k}$,其中 $a$ 与 $b$ 是 $F_0$ 中任意的数. 如果 $\sqrt{k}$ 不在 $F_0$ 中,那么我们能证明,形如 $a + b\sqrt{k}(a, b, k$ 在 $F_0$ 中) 的所有数构成一个新域 $F_1$,它以 $F_0$ 为子域. 例如令 $k = 3$,则 $a + b\sqrt{3}$ 构成域 $F_1$, $F_1$ 包含所有有理数为子域,即当 $b = 0$ 时的所有的那些数.

为了证明所有的数 $a + b\sqrt{k}$ $(a, b, k$ 在 $F_0$ 中, $\sqrt{k}$ 不在 $F_0$ 中) 构成一个域,我们注意到

1. $(a+b\sqrt{k})+(c+d\sqrt{k}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{k} = e+f\sqrt{k}$,

2. $$(a + b\sqrt{k}) - (c + d\sqrt{k}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{k} = m + n\sqrt{k},$$

3. $$(a + b\sqrt{k}) \times (c + d\sqrt{k}) = (ac + bdk) + (ad + bc)\sqrt{k} = r + s\sqrt{k},$$

4. $$\frac{a + b\sqrt{k}}{c + d\sqrt{k}} \cdot \frac{c - d\sqrt{k}}{c - d\sqrt{k}} = \frac{(ac - bdk) + (bc - ad)\sqrt{k}}{c^2 - d^2k} = \frac{ac - bdk}{c^2 - d^2k} + \frac{(bc - ad)\sqrt{k}}{c^2 - d^2k} = u + v\sqrt{k}.$$

因为 $a, b, c, d, k$ 是域 $F_0$ 中的数,所以这些有理数中任两数的和、差、乘积与商是有理数. 因此, $e, f, m, n, r, s, u$ 与 $v$ 是有理数,这就证明了,形如 $a + b\sqrt{k}$ 的数构成域 $F_1$,它包含 $F_0$ 为子域. 还有一个需要说明的细节.

当 $(a+b\sqrt{k})$ 被 $(c+d\sqrt{k})$ 除时, 我们得 $u+v\sqrt{k}$, 其中

$$u=\frac{ac-bdk}{c^2-d^2k}$$

与

$$v=\frac{bc-ad}{c^2-d^2k}.$$

因此当且仅当

$$c^2-d^2k\neq 0$$

时 $u$ 与 $v$ 是有理数. 我们假设 $\sqrt{k}$ 不在 $F_0$ 中. 于是 $k\neq 0$. 在做除法时, 我们假设除数不是 0. 因此 $c$ 与 $d$ 不同时为 0, 但是 $c$ 或 $d$ 可以为 0. 我们现在来证明 $c^2-d^2k\neq 0$. 如果 $c^2-d^2k=0$, 那么 $c^2=d^2k, k=c^2/d^2$ 与 $\sqrt{k}=\pm c/d$. 于是 $\sqrt{k}$ 在 $F_0$ 中, 与假设矛盾. 这就完成了形如 $a+b\sqrt{k}$ 的所有数构成域 $F_1$ 的证明.

其次, 我们能作一切形如 $a_1+b_1\sqrt{k_1}$ 的数, 其中 $a_1$ 与 $b_1$ 是 $F_1$ 中的任意数, $k_1$ 是 $F_1$ 中一固定数, $\sqrt{k_1}$ 不在 $F_1$ 中. $\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$ 是这样的数, 其中 $a_1=\sqrt{5}, b_1=\sqrt{2}, k_1=\sqrt{3}$ 在 $F_1$ 中, $\sqrt{k_1}=\sqrt[4]{3}$ 不在 $F_1$ 中. 另一个例子是 $5+2\sqrt[4]{3}$. 我们也能用与上述完全类似的步骤来证明, 形如 $a_1+b_1\sqrt{k_1}$ 的数构成域 $F_2$, 它以 $F_1$ 作为子域 (这个子域包含形如 $a_1+b_1\sqrt{k_1}$ 的数, 其中 $b_1=0$).

这个过程能无限地继续到我们达到 $F_n$ 为止, $n$ 是一个正整数. 我们现在有一个具有下列性质的域序列 $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n$ :

1. $F_0$ 是有理数域.

$F_1$ 是把 $\sqrt{k}$ 添加到 $F_0$ 中得到的域, 其中 $k$ 是 $F_0$ 中一固定数, 使得 $\sqrt{k}$ 不在 $F_0$ 中; $F_1$ 包含一切形如 $a+b\sqrt{k}$ 的数, $a, b, k$ 在 $F_0$ 中, $\sqrt{k}$ 不在 $F_0$ 中.

$F_2$ 是把 $\sqrt{k_1}$ 添加到 $F_1$ 中得到的域, 其中 $k_1$ 是 $F_1$ 中一固定数, 使得 $\sqrt{k_1}$ 不在 $F_1$ 中. 域 $F_2$ 包含一切形如 $a_1 + b_1\sqrt{k_1}$ 的数; $a_1, b_1, k_1$ 在 $F_1$ 中, $\sqrt{k_1}$ 不在 $F_1$ 中.

$F_n$ 是把 $\sqrt{k_{n-1}}$ 添加到 $F_{n-1}$ 中得到的域, 其中 $k_{n-1}$ 是 $F_{n-1}$ 中一固定数, 使得 $\sqrt{k_{n-1}}$ 不在 $F_{n-1}$中, $F_n$ 包含一切形如 $a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{k_{n-1}}$ 的数; $a_{n-1}, b_{n-1}, k_{n-1}$ 在 $F_{n-1}$ 中, 但 $\sqrt{k_{n-1}}$ 不在 $F_{n-1}$ 中. $F_n$ 中的数可以非常复杂, 它可以由 $n$ 个平方根组成, 一个平方根在另一个平方根外面. $F_4$ 中一数的例子是

$$\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{5}}}}.$$

为了得到数

$$\sqrt{\sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{5}}}},$$

我们从 $k_0 = 5$ 开始, 其次 $k_1 = 7+\sqrt{k_0}, k_2 = 3+\sqrt{k_1}, k_3 = \sqrt{k_2}$ 与 $k_4 = \sqrt{k_3}$. 因此这个数在 $F_4$ 中.

2. $F_0$ 是 $F_1$ 的子域; $F_1$ 是 $F_2$ 的子域; $F_{n-1}$ 是 $F_n$ 的子域.

3. $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n$ 中的每个数都是可作图的, 因为这些域中任一域的数都能由单位元素作有限次有理运算与求平方根得出.

4. 反之, 任一可作图的数都能从域 $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n$ 中的一个域中找到, 因为我们已经证明了, 只有当确定

所求元素的数能由已知元素 (假定用有理数表示) 作有限次有理运算与求平方根得出时, 这些作图才是可能的.

作为总结, 我们可以陈述下列定理 —— 在域 $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n$ 中的一切数都能作图, 反之, 可作图的数一定在域 $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n$ 之一中. 因此, $\sqrt{3+\sqrt[8]{2}}$ 是可作图的, 因为 $\sqrt{3+\sqrt[8]{2}}$ 在 $F_4$ 中; 但是 $\sqrt{3+\sqrt[6]{2}}$ 是不可作图的, 因为 $\sqrt{3+\sqrt[6]{2}}$ 不在域 $F_0, F_1, \cdots, F_n$ 的任一域中.

## 问题　II–B 组

1. 把数 $7/(5-\sqrt{2})$ 表示成形式 $a+b\sqrt{k}$, 其中 $a, b, k$ 在 $F_0$ 中, 证明 $7/(5-\sqrt{2})$ 在 $F_1$ 中.

2. 把数 $5/(2-\sqrt[4]{3})$ 表示成形式 $a_1+b_1\sqrt{k_1}$, 其中 $a_1, b_1, k_1$ 在 $F_1$ 中, 证明 $5/(2-\sqrt[4]{3})$ 在 $F_2$ 中. 提示: 为使分母有理化, 利用恒等式

$$s^4-t^4=(s-t)(s+t)(s^2+t^2), \quad s=2,\ t=\sqrt[4]{3}.$$

我们现在由下列定理的证明, 能够确定 3 次方程的根什么时候可作图. 这个定理是: 如果含有理系数的 3 次方程没有有理根, 那么它没有一个根可作图. 如果含有理系数的 3 次方程至少有一个有理根, 那么称这个方程在有理域内是可约的. 如果方程没有有理根, 那么称它在有理数域内是不可约的. 因此, 我们想要证明, 不可约的 3 次方程没有一根可作图. 我们能把 3 次方程表示为

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

其中 $p, q, r$ 在 $F_0$ 中. 由假设, 方程是不可约的, 从而没有有理根. 我们假设一个根 $x_1$ 可作图, 则 $x_1$ 是某个域 $F_n$ 中的一数, 其中 $n$ 是正整数, $x_1$ 不能属于 $F_0$, 因为方程是不可约的. 令 $m$ 是使 $x_1$ 属于 $F_m$ 的最小整数, 即 $x$ 不属于 $F_{m-1}(m > 1)$. 如果这个方程有任一其它可作图的根, 那么我们假设这个根属于 $F_r$, 其中 $r \geqslant m$. 于是 $x_1$ 具有形式

$$a_{m-1} + b_{m-1}\sqrt{k_{m-1}}.$$

为了简化记号, 令

$$a = a_{m-1}, \quad b = b_{m-1}, \quad k = k_{m-1}.$$

换句话说, $a, b, k$ 属于 $F_{m-1}, x_1 = a + b\sqrt{k}$ 属于 $F_m$ 但不属于 $F_{m-1}$.

我们现在来证明, 如果 $a + b\sqrt{k}$ 是下列 3 次方程的根:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

那么 $a - b\sqrt{k}$ 也一定是方程的根. 如果 $a + b\sqrt{k}$ 是方程的根, 那么

$$(a + b\sqrt{k})^3 + p(a + b\sqrt{k})^2 + q(a + b\sqrt{k}) + r = 0,$$

化简后得

$$a^3 + 3a^2b\sqrt{k} + 3ab^2k + b^3k\sqrt{k} + pa^2 + 2pab\sqrt{k} + pb^2k$$
$$+qa + qb\sqrt{k} + r = 0$$

或者 $s+t\sqrt{k}=0$, 其中

$$s=a^3+3ab^2k+pa^2+pb^2k+qa+r$$

以及

$$t=3a^2b+b^3k+2pab+qb.$$

因此, 或者 $\sqrt{k}=-s/t$, 或者 $s=0$ 与 $t=0$. 但是 $t$ 与 $s$ 是 $F_{m-1}$ 中的数, 因此, 如果 $\sqrt{k}=-s/t$, 那么 $\sqrt{k}$ 还是 $F_{m-1}$ 中的数, 与假设 $m$ 是使 $x_1$ 属于 $F_m$ 的最小整数矛盾. 所以 $s=0$ 与 $t=0$.

如果我们现在把 $a-b\sqrt{k}$ 代入下列方程中的 $x$ :

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

得出表达式 $s'+t'\sqrt{k}$, 其中

$$s'=a^3+3ab^2k+pa^2+pb^2k+qa+r,$$
$$t'=-(3a^2b+b^3k+2pab+qb).$$

于是 $s'=s=0$ 与 $t'=-t=0$. 因此 $s'+t'\sqrt{k}=0$, 并且 $a-b\sqrt{k}$ 是 3 次方程的根.

我们现在知道了 $x_1=a+b\sqrt{k}$ 与 $x_2=a-b\sqrt{k}$. 为了求出第 3 个根 $x_3$, 我们注意到, 3 次方程可以写

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$$
$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x$$
$$-x_1x_2x_3=0.$$

因此

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,$$

或者, 因为 $x_1 + x_2 = 2a$, $x_3 = -2a - p$, 这表示一个根 $x_3$ 在 $F_{m-1}$ 中, 与假设 $m$ 是使 $F_m$ 包含 3 次方程根的最小整数矛盾.

因此我们得出结论: 如果含有理系数的 3 次方程有可作图的根, 那么方程也有一个有理根. 如果以 $x_r$ 表示这个有理根, 那么可以把 3 次方程写成

$$(x - x_r)(x^2 + p_1 x + q_1) = 0.$$

从而其它两个根是 2 次方程的根, 也是可作图的. 反之, 如果含有理系数的 3 次方程有一个有理根, 那么我们可以把方程写成

$$(x - x_r)(x^2 + p_1 x + q_1) = 0,$$

其中 $p_1$ 与 $q_1$ 是有理数. 因此这个方程的各个根是可作图的. 作为总结, 我们可以叙述下列定理:

当且仅当含有理系数的 3 次方程有有理根时, 方程的各个根是可作图的. 如果方程是不可约的, 那么没有一个根可用直尺与圆规作图.

3 次方程的这个性质在解决希腊人不能处理的绝大多数作图题时是基本的. 正如以后各章将要证明的那样, 这个定理可以用来解决下列问题 —— 立方倍积, 3 等分任意角, 作正 7 边形与正 9 边形. 正如以后的发展所证明, 化圆为方问题需要不同性质的结果. 在我

们探讨这些问题以前,将简要地穿插介绍关于复数的知识.

最后, 值得注意的是, 关于 3 次方程的定理是更一般定理的特殊情形, 这个一般定理的证明已经超出本书的范围. 我们首先在更一般的范围内定义术语"不可约"; 令 $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 是 $n$ 次多项式方程, 其中 $n$ 表示正整数, $a_i$ 表示有理数. 如果 $p(x)$ 可以因式分解成含有理系数的较低次多项式的积,那么 $p(x) = 0$ 在有理数域中是可约的. 如果 $p(x)$ 不能这样分解, 那么称 $p(x)$ 是不可约的. 现在就能证明, 当且仅当表示几何元素的数是含有理系数的 $2^k$ 次不可约多项式方程的根时, 该几何元素是可作图的, 其中 $k$ 表示非负整数.

## 问题 II–C 组

1. 证明 $\sqrt{3+\sqrt[4]{2}}$ 是一个 $2^3$ 次不可约方程的根.

2. 作 $\sqrt{3+\sqrt[4]{2}}$.

3. 下列 3 次方程中哪一个有有理根?

(a) $x^3 - 1 = 0$,

(b) $x^3 - 2 = 0$.

4. 求可约 3 次方程的 3 个根.

5. 已知 3 次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, 其中 $a, b$ 与 $c$ 是有理数, 它的根 $r_1, r_2$ 与 $r_3$ 是正实数; 如果 $r_1$ 是有理数, 证明: 如果方程所有的根是 $F_0$ 或 $F_1$ 中的数, 那么方程所有的根是可作图的. 例如, 已知单位长度, 作

方程 $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ 的各个根.

6. 如果 $2 + \sqrt{3}$ 是 3 次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 其中 $a, b$ 与 $c$ 是有理数, 证明方程的一个根是有理数.

# 第 III 章　复数

你们可能感到惊讶, 复数与作几何的线或图形有什么关系. 但是当你们进行下去时, 你们将看到, 复数在涉及实数的代数问题与几何问题中都是最有用的.

你们回忆一下, 求单位边长的正方形对角线, 得出方程 $x^2 = 2$, 已经证明, 这个方程的解是希腊数学家们前进的真正障碍. 希腊人用有序的整数对 $(a/b, b \neq 0)$ 得出有理数. 但是, 从有理数发展到实数 (包括无理数) 就没有这样简单的方法了.

在数学史中, 另一个障碍是由方程 $x^2 + 1 = 0$ 产生的. 你们一定能证明, 没有一个实数的平方等于 $-1$. (正数或负数的平方是正数; 0 的平方是 0). 还有两种选择: 或者必须假设简单方程 $x^2 + 1 = 0$ 无解, 或者必须把实数系统这样扩张, 使一个新数域包含 $x^2 + 1 = 0$ 的

解. 当然后一选择更令人满意, 并且新数域容易用下列类似于从整数构成有理数的方法得出, 即利用一个有序实数对构成复数, 并适当定义相等、加法、乘法. 我们可以把复数表示为 $a+bi(i=\sqrt{-1})$ 的形式. 相等、加法与乘法的定义如下:

1. 当且仅当 $a=c$ 与 $b=d$ 时 $a+bi=c+di$.
2. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
3. $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

如果把 $i$ 看作和其它变量 (如 $x$) 一样, 且具有限制条件 $i^2=-1$, 那么这些定义正是我们所要求的.

## 问题 III–A 组

对于 $a$ 与 $b$ 的什么值, $a+bi$ 是 $x^2+1=0$ 的解.

在表示复数时, 不一定使用 $i$. 我们可以只写 $(a,b)$, 其中 $a$ 与 $b$ 是实数.

## 问题 III–B 组

1. 利用形式 $(a,b)$ 来表示复数, 写出相等、加法与乘法的定义.

2. 如果我们把复数的加法单位元写作 $(0,0)$, 把乘法的单位元写作 $(1,0)$, 求 $x^2+(1,0)=(0,0)$ 的解, 并检验你们的答案.

你们当然熟悉下列事实: 极坐标 $(r,\theta)$ 与直角坐标 $(a,b)$ 都能用来表示复数. 于是在极坐标中, 复数 $a+bi$

或 $(a, b)$ 可以表示为 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (如图 5).

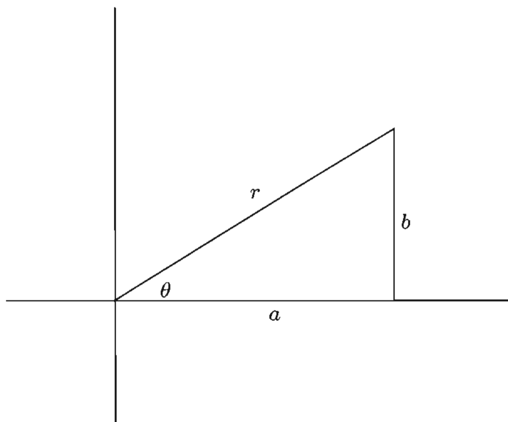



图 5

复数的极坐标形式能使我们很容易将 2 个复数相乘:

$$\begin{aligned}&r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\=\ &r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

即我们把 2 个复数相乘时, 把它们的模相乘, 把它们的辐角相加.

## 问题　III–C 组

1. 利用下列三角恒等式, 证明上述命题:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

2. 证明

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

如果我们令 $r_1=r_2=1$ 与 $\theta_1=\theta_2$, 则得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta.$$

上面这个方程是下面棣莫弗 (De Moivre) 定理的实例:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta.$$

当 $m$ 是正整数时, 这个定理可以用数学归纳法证明. 当 $m=1$ 时定理一定成立. 如果我们假设它对 $m$ 成立, 那么 $(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$. 从而

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{m+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos m\theta+i\sin m\theta)\\&=\cos\theta\cos m\theta-\sin\theta\sin m\theta\\&\quad+i(\sin\theta\cos m\theta+\cos\theta\sin m\theta)\\&=\cos(m+1)\theta+i\sin(m+1)\theta.\end{aligned}$$

因此, 证明了这个定理对一切实数都成立. 但是, 棣莫弗定理当 $m$ 为一切实数或复数时都是成立的. 现在我们利用这个定理来得出一个关于实数的有用公式.

如果 $x$ 是一个实数, 那么 $(\cos x+i\sin x)^2=\cos 2x+i\sin 2x$. 但是

$$(\cos x+i\sin x)^2=(\cos^2 x-\sin^2 x)+2i\sin x\cos x,$$

$$\cos 2x+i\sin 2x=(\cos^2 x-\sin^2 x)+2i\sin x\cos x.$$

因此

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad 与 \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

注意到, 使 2 个相等复数的实部与虚部分别相等, 我们能够得到只包含实数的公式组.

## 问题 III–D 组

利用上述方法, 证明

1. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

2. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

提示: 在使复数的实部与虚部分别相等后, 利用关系式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

注意, 在讨论三等分角的问题时, 我们将利用 III–D 组问题中的第一个公式.

棣莫弗定理能够使我们用很简单的方法求出 1 的方根 (在讨论作正多边形问题时, 我们将利用 1 的方根). 为了求出 1 的 2 个平方根, 在代数上可以按下列方法进行:

$$x^2 = 1 \quad 与 \quad x = +1 \quad 或 \quad x = -1.$$

利用棣莫弗定理, 我们进行如下: 令 $R = \cos\theta + i\sin\theta$, 其中 $R$ 是 1 的平方根. 于是 $R^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta = 1$, 因为 $R$ 是 1 的平方根. 因此 $2\theta = 2k\pi$, 其中 $k$ 是任一整数. 但是, 只有 $k$ 的 2 个值给出 $R$ 的不同值. 因此

$$R_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \quad (k = 1),$$

$$R_2 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \quad (k = 2).$$

在上例中用棣莫弗定理显然没有好处. 但是, 如果我们要求 1 的 17 个 17 次方根, 那么棣莫弗定理的威力就变成很明显了.

我们试求 1 的 3 个立方根. 在代数上利用方程

$$x^3 - 1 = 0,$$
$$(x-1)(x^2+x+1) = 0,$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

注意, 其中 2 个根是虚数.

由棣莫弗定理, 我们有

$$R = \cos\theta + i\sin\theta,$$
$$R^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta = 1,$$
$$3\theta = 2k\pi, \quad k = 1, 2, 3,$$
$$\theta = \frac{2k\pi}{3} \quad k = 1, 2, 3,$$
$$R_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$
$$R_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3},$$
$$R_3 = \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3} = 1.$$

## 问题 III–E 组

证明

$$R_1 = x_2, \quad R_2 = x_3, \quad R_3 = x_1.$$

注意到 (再利用棣莫弗定理)

$$R_2 = R_1^2, \quad R_3 = R_1^3.$$

因此我们可以把 1 的 3 个立方根写成 $R, R^2$ 与 $R^3$. 再注意到, 在作图时, 1 的立方根分单位圆为 3 个相等部分, 连接各分点可以构成一个等边三角形.

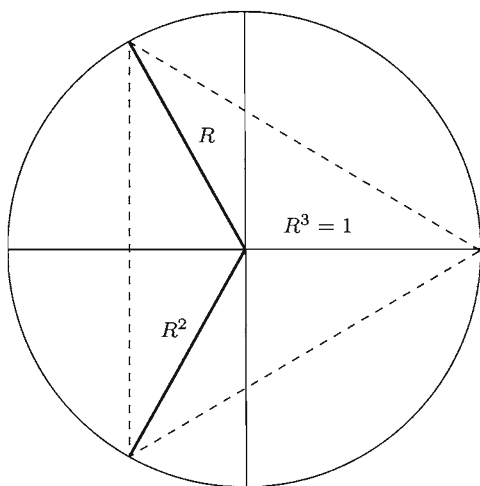



图 6

## 问题　III–F 组

如果我们令 $x_2 = (-1 + \sqrt{-3})/2 = \omega$, 证明 $x_3 = \omega^2$ 与 $x_1 = \omega^3$. 对于 1 的 2 个平方根, 类似的关系式成立吗?

我们现在来推广上述方法, 并求方程 $x^n = 1$ 或 $x^n - 1 = 0$ 的 $n$ 个根的表达式. 利用几何级数求和公式或直

接相乘, 可以证明

$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\quad(x\neq 1).$$

如果我们令 $R(\neq 1)$ 是 1 的 $n$ 次方根, 那么所有的根可以表示为 $R,R^2,R^3,\cdots,R^{n-1},R^n=1$, 因为 1 的 $n$ 次方根可以写成

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

于是对于 $k=1$,

$$R_1=\frac{\cos 2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

对于 $k=2$,

$$R_2=\frac{\cos 4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}=R_1^2,$$

对于 $k=n$,

$$R_n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=R^n=1.$$

在复平面内作图时, 1 的 $n$ 个 $n$ 次方根把单位圆分成 $n$ 个相等的弧, 连接这些弧就得出一个正 $n$ 边形. 因为方程 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ 的根是 1 的 $n$ 次复数根与根 $x=1$, 分圆为相等的诸部分, 所以这个方程称为"割圆" (分圆) 方程. 数 $R,R^2,\cdots,R^n$ 构成一个乘法群, 因为它们满足下列 4 个条件:

1. 封闭性　$R^a\cdot R^b=R^{a+b}=R^c$, 其中 $a,b,c$ 是小于或等于 $n$ 的整数.

2. 结合律　$R^a(R^b \cdot R^c) = (R^a \cdot R^b) \cdot R^c = R^{a+b+c}$.

3. 单位元素是 $R^n$, 因为 $R^a \cdot R^n = R^a$.

4. $R^a$ 的逆元素是 $R^{n-a}$.

再注意到, $R(\cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n)$ 的逆元素是 $R^{-1}$, $R^{-1}$ 可以写成 $\cos(2\pi/n) - i\sin(2\pi/n)$.

## 问题　III–G 组

1. 把 1 的 7 个 7 次方根 $(R, R^2, \cdots, R^7 = 1)$ 用极坐标形式表示.

2. 1 的 7 个 7 次方根构成一个群. 证明

(a) $R^3 \cdot R^6$ 是这个群中的元素.

(b) $R^5$ 的逆元素是这个群中的元素.

(c) $R^2 + (1/R^2) = 2\cos 4\pi/7$.

3. 利用公式 $S = (ar^n - a)/(r-1)$, 证明

$$1 + R + R^2 + \cdots + R^{n-1} = \frac{R^n - 1}{R - 1}.$$

# 第 IV 章　提洛问题

---

作一个立方体使其体积是已知立方体体积 2 倍的作图问题通称为提洛 (Delos) 问题. D. E. 史密斯 (Smith) 在他的《数学史》中叙述了关于这个问题的下列故事: "…… 雅典人向提洛的圣人了解公元前 430 年在这个城市发生的瘟疫的情况如何. 据说, 圣人答说, 他们必须把阿波罗 (Apollo) 的圣坛的大小加倍. 这个圣坛是一个立方体, 问题就是把它的体积加倍."

把棱长为 1 单位的立方体加倍的问题得出方程 $x^3 = 2$, 这是一个不可约的 3 次方程. 因为如果 $x^3 = 2$ 的解是有理数, 那么我们可以把解表示为 $a/b$, $a$ 与 $b$ 是整数, $b \neq 0$. 令 $a/b$ 在最低项中, 即 $a$ 与 $b$ 没有大于 1 的公因数, 则 $a^3 = 2b^3$, $a^3$ 是偶数. 因此 $a$ 是一个偶数, 例如是 $2n$, 因为一个奇数的立方是奇数. 于是

$(2n)^3 = 2b^3$, $b^3 = 4n^3$, $b^3$ 是偶数, $b$ 是偶数, 这与假设 $a$ 与 $b$ 没有大于 1 的公因数矛盾. 因为 $x^3 = 2$ 是一个不可约的 3 次方程, 所以它的根不能用无刻度的直尺与圆规作出, 并且用这些工具把立方体体积加倍是不可能的.

希波克拉底 (Hippocrates) 与梅内克缪斯 (Menachmus) 早期的努力证明了, 这个问题可用求抛物线与双曲线的交点来解决. 因此, 如果令 $b = 2a$, 那么方程 $x^2 = ay$ 与 $y^2 = bx$ 得出方程 $x^3 = 2a^3$.

## 问题 IV–A 组

1. 由 $x^2 = ay$ 与 $y^2 = bx$ 导出方程 $x^3 = 2a^3$.

2. 为什么这个方法不能看作提洛问题的 "解"?

3. 令 $b = 2a$, 证明 $x^2 = ay$ 与 $xy = ab$ 也导出方程 $x^3 = 2a^3$.

狄奥克莱斯 (Diocles) (公元前 2 世纪) 利用了蔓叶线把立方体体积加倍. 韦达 (Vieta)、笛卡儿 (Descartes)、费马 (Fermat) 与牛顿 (Newton) 也发展了立方体体积加倍的方法. 牛顿为此目的利用了帕斯卡 (Pascal) 蜗线. 当然, 这些方法没有一个限制它要用无刻度的直尺与圆规.

## 问题 IV–B 组

1. 虽然不能使立方体加倍, 但是 2 维的类似问题却可以解.

作一个正方形使其面积是已知正方形面积的 2 倍.

2. 能不能作一个球的半径, 使球表面积是单位球表面积的 2 倍, 或者使球体积是单位球的 2 倍?

# 第 V 章　三等分角的问题

某些角不难三等分. 例如直角可以三等分, 因为 $30^\circ$ 角可以作出. 但是, 只利用无刻度的直尺与圆规, 没有办法作出任意角的 $\dfrac{1}{3}$.

我们用 $60^\circ$ 角不能三等分来证明这个命题. 为此目的, 我们利用第 III 章中得到的公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

令 $3\theta = 60^\circ$, 则 $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$. 又令 $x = 2\cos\theta = 2\cos 20^\circ$, 则

$$\frac{1}{2} = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

即

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

我们可以证明, 3 次方程 $x^3-3x-1=0$ 是不可约的. 因为设 $x=a/b$, 其中 $a$ 与 $b$ 是没有大于 1 的公因数的整数, $b\neq 0$. 于是 $(a^3/b^3)-3(a/b)-1=0$ 与 $a^3-3ab^2=b^3$, 或者 $b^3=a(a^2-3b^2)$, $a$ 整除 $b^3$.

因为 $a$ 与 $b$ 没有大于 1 的公因数, 所以 $a$ 一定是 +1 或 −1. 类似地, $a^3=b^3+3ab^2=b^2(b+3ab)$, $b^2$ 整除 $a^3$. 因此 $b$ 也一定是 +1 或 −1.

于是, $x^3-3x-1=0$ 唯一的可能有理根是 +1 或 −1. 因为 +1 与 −1 都不是方程的根, 所以 $x^3-3x-1=0$ 是不可约的 3 次方程, 并且用直尺与圆规不能作出它的根.

因此用直尺与圆规不能作出 $\cos 20^\circ$. 因为当且仅当一角的余弦能作出时, 这个角才能作出, 我们证明了, 20° 角不能作出, 并且一般角不能三等分.

证明 3 次方程 $x^3-3x-1=0$ 不可约的另一种方法是利用下列代数定理: 如果一切系数均为整数的方程 $c_0x^m+c_1x^{m-1}+\cdots+c_n=0$ 有有理根 $a/b$, 那么 $a$ 是 $c_n$ 的因数, $b$ 是 $c_0$ 的因数 (这个定理的证明可以在伊万 · 尼文 (Ivan Niven) 著的《有理数与无理数》(*Numbers: Rational and Irrational*) 一书中找到). 我们又得到结论, ±1 只是有理根的候选者.

## 问题　V–A 组

1. 用一个坐标系, 对

(a) 已知锐角 $A$, 作 $\cos A$.

(b) 已知钝角 $A$, 作 $\cos A$.

(c) 已知一线段的长度是 $\cos A$, 作 $A$.

2. 利用恒等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, 确定下列各角中每个角是否可以 3 等分:

$$\text{(a) } 90^\circ,\quad \text{(b) } 120^\circ,\quad \text{(c) } 180^\circ.$$

阿基米德 (Archimedes) 提出了一个三等分角的有趣方法.

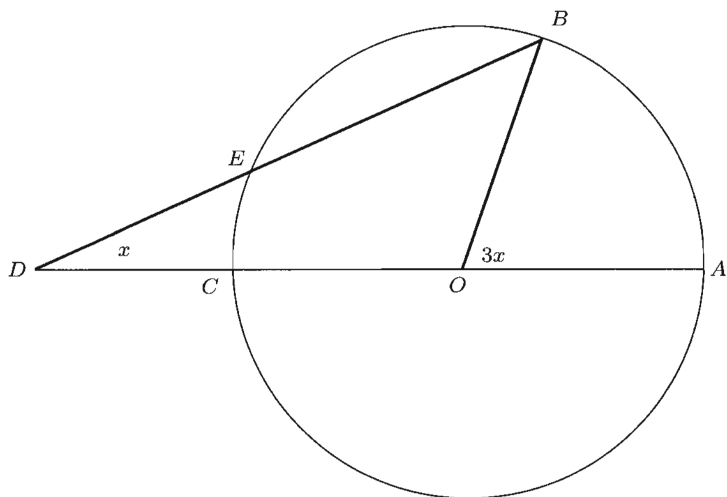



图 7

令 $\angle AOB$ 是一个已知角. 以 $O$ 为圆心与任一适当的长为半径作一个圆. 经过 $B$ 作一直线与直径 $AC$ 的延长线相交, 使得 $ED$ 等于圆的半径. 于是 $\angle D$ 是 $\angle AOB$ 的 1/3 (如图 7).

## 问题　V–B 组

1. 证明 $\angle D$ 是 $\angle AOB$ 的 1/3.

2. 为什么这个方法不满足可作图性的要求?

另一个三等分角的巧妙方法如下.

令 $\angle AOB$ 是一个已知角, $OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线, $OD$ 是 $\angle COB$ 的平分线, 等等, 即继续平分由 $OB$ 与最后一条角平分线构成的角. 我们现在有 $\angle AOB$ 的下列分数部分 ——$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$. 利用圆规与直尺, 把 $\angle AOB$ 的各部分 (从 $\frac{1}{4}$ 开始) 联合起来:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots.$$

因此我们有一个无穷几何级数, 它的公比是 1/4, 总和是 1/3.

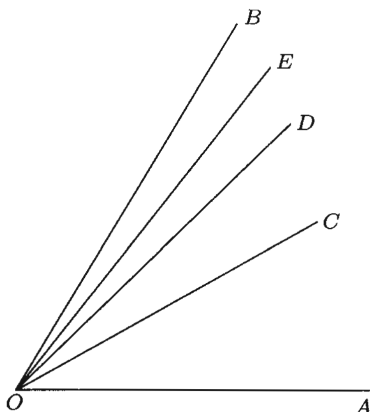



图 8

## 问题 V–C 组

1. 证明 $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$.

2. 为什么这个方法不满足可作图性的要求?

尼科米迪斯 (Nicomedes) (公元前 2 世纪) 利用蚌线三等分角. 另一个希腊数学家希皮亚斯 (Hippias) (公元前 5 世纪) 发明了一条曲线, 他用来三等分角. 因为这条曲线还用在化圆为方问题上, 所以称为割圆曲线. 割圆曲线可被用来把一个角分成任意个相等部分. 感兴趣的读者可以参考 D. E. 史密斯 (Smith) 的《数学史》(*History of Mathematics*) 一书, 书中描述了蚌线与割圆曲线以及怎样利用它们来三等分角.

# 第 VI 章　化圆为方问题

希腊人韦勒 (Were) 能作一个正方形使其面积等于任一已知多边形的面积. 于是为作一个正方形使面积等于一个已知平行四边形的面积, 我们可以利用方程 $x^2 = bh$, 其中 $b$ 与 $h$ 分别是这个平行四边形的底边与

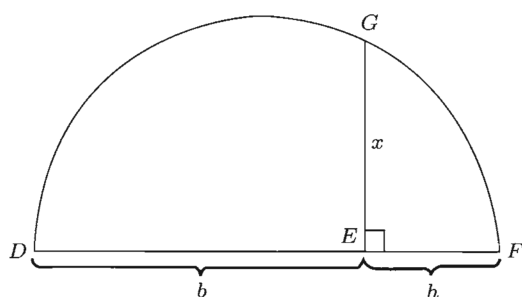



图 9

高, $x$ 是正方形的一边. 首先作已知平行四边形的高. 然后以 $b+h$ 为直径作半圆. 在 $E$ 上作 $EG$ 垂直于 $DF$, 与半圆相交于 $G$, 则 $EG=x$ (如图 9).

为了作一个正方形使面积等于一个四边形的面积, 我们可以进行如下: 作四边形 $ABCD$ 的对角线 $DB$. 过 $C$ 作一直线平行于 $DB$, 与 $AB$ 的延长线相交于 $F$. 连接 $DF$. 于是 $\triangle AFD$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积. 利用方程 $x^2=\dfrac{1}{2}bh$, 可以作出一个正方形使面积等于任一已知三角形的面积 (如图 10).

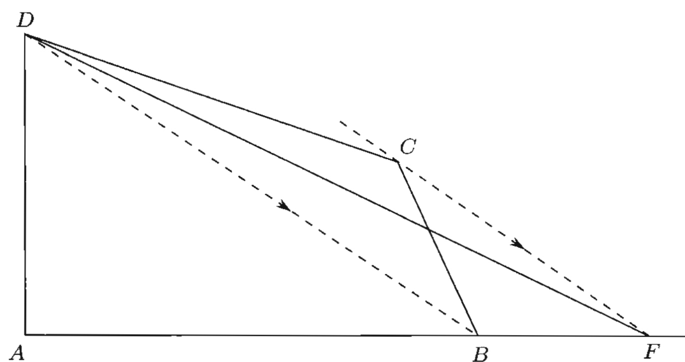



图 10

## 问题　VI–A 组

1. 在作一个正方形使其面积等于一个已知平行四边形面积的图中, 证明 $\overline{EG}^2=bh$.

2. 在作一个正方形使面积等于一个已知四边形面积的图中, 证明 $\triangle AFD$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 的

面积.

3. 作一个正方形使面积与 (a) 已知四边形, (b) 已知五边形的相等.

因为可以作一个正方形使面积等于直线形的面积, 所以自然试图作一个正方形使面积等于一个最简单的曲线图形 —— 圆的面积. 让我们来看, 是否能作一个正方形使其面积等于一个有单位半径的已知圆的面积. 方程变为 $x^2 = \pi$, 我们可以利用下列作法: $ADC$ 是用 $(\pi + 1)$ 作为直径在 $AC$ 上作出的半圆. 但是怎样作线段 $AB = \pi$ 呢?

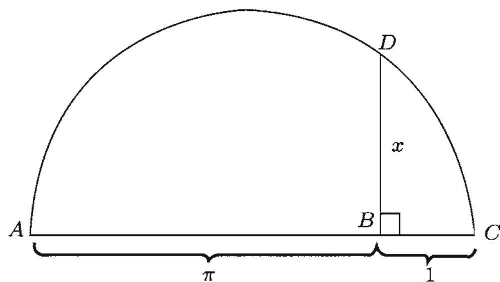



图 11

试图在几何上作 $\pi$ 或在代数上确定它的精确值的历史有三个十分明确的时期. 第一个时期从古代延伸到 17 世纪中期. 它的特点是用纯粹几何方法巧妙地企图求出 $\pi$ 的近似值. 正如上一章所指出, 希皮亚斯发明的割圆曲线可以用来作 $2/\pi$. 于是割圆曲线可以用来化圆为方, 但是割圆曲线本身不能用直尺与圆规作出. 利用圆的内接与外切正多边形, 阿基米德 (他被认为是古

代最伟大的数学家) 能够证明 $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ (这是一个有现代风格的结果). 他利用了 96 边形. 在第一个时期结束之前, 卢多尔夫 · 冯 · 柯伦 (Ludolph van Ceulen) (16 世纪) 计算 $\pi$ 至小数 17 位 (在德国, $\pi$ 称为卢多尔夫数). 在 1621 年, 斯涅尔 (Snell) 计算 $\pi$ 至 35 位小数, 但是他利用了正 $2^{30}$ 边形.

$\pi$ 的精确小数值一直没有找到, 甚至不知道这样的值是否能找到 —— 不知道 $\pi$ 是不是有理数 (有理数或者可表示为有尽小数, 或者可表示为无限循环小数, 反之, 有尽小数或无限循环小数可表示为有理数.)

## 问题　VI–B 组

1. 利用单位圆的内接与外切正 $n$ 边形确定 $\pi$ 的上限与下限, 并求圆周长的近似值. 利用边数 $n$ 为 (a) 4, (b) 8.

2. 做除法到必要多的位数, 证明 $3\frac{1}{7}$ 是循环小数.

3. 把 $3.\dot{1}\dot{4}$ 表示为有理数. $\dot{1}\dot{4}$ 表示这两个数字无限重复.

希腊人受希波克拉底 (Hippocrates) (公元前 5 世纪) 发明的鼓舞研究化圆为方问题的解法. 希波克拉底证明了, 能作一个正方形使面积等于一个曲线图形的面积. 从一个等腰直角三角形开始, 以 $C$ 为圆心, 以 $CB$ 为半径作圆的弧 $BFA$. 再以 $D$ ($AB$ 的中点) 作圆心, 以 $DB$ 为半径作半圆 $AEB$. 月牙形 $AEBFA$ 的面积等于以长度 $BD$ 为边长的正方形的面积 (如图 12). 能作

一个正方形使面积等于月牙形这个事实使希腊数学家相信,化圆为方应该不太困难.但是,在怎么解或者事实上是否有解的问题上都没有找到任何线索时,第一个时期结束了.

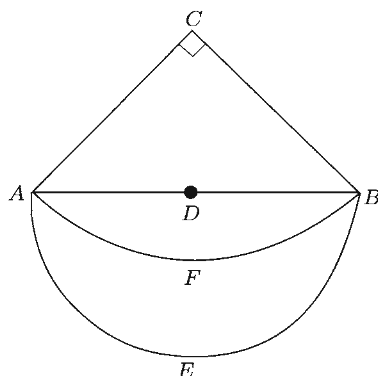



图 12

第二个时期从 17 世纪下半叶开始. 利用新的分析,微积分, 一些人如牛顿、费马、沃利斯 (Wallis) 与欧拉等研究了这个问题. 发现了 $\pi$ 的许多数值表达式 (包括无穷级数、无穷乘积与连分数). 关于这些求 $\pi$ 近似值的方法的实例,读者可以参考 D. E. 史密斯的《数学史》(*History of Mathematics*) 、P. J. 达维斯 (Davis) 的《大数知识》(*Lore of Large Numbers*) 与 C. D. 欧尔德斯 (Olds) 的《连分数》(*Contimued Fractions*). 在 1873 年, 英国数学家尚克斯 (Shanks) 计算了 $\pi$ 至 707 位小数, 但是后来证明了只有 527 位是正确的.

在 1685 年, 耶苏会的数学家阿当莫 · 科汉斯基

(Adam Kochansky) 给出了化圆为方的下列作法: 作一个单位圆与直线 $RS$ 相切于 $A$. 令 $O$ 为圆心. 在整个作图过程中, 保持圆规固定. 以 $A$ 为圆心作一弧与圆相交于 $C$. 以 $C$ 为圆心作一弧与第一条弧相交于 $D$. 作 $OD$ 与 $RS$ 相交于 $E$. 作 $\overline{EH}$ 为单位长, 则 $BH = \pi$ (近似值).

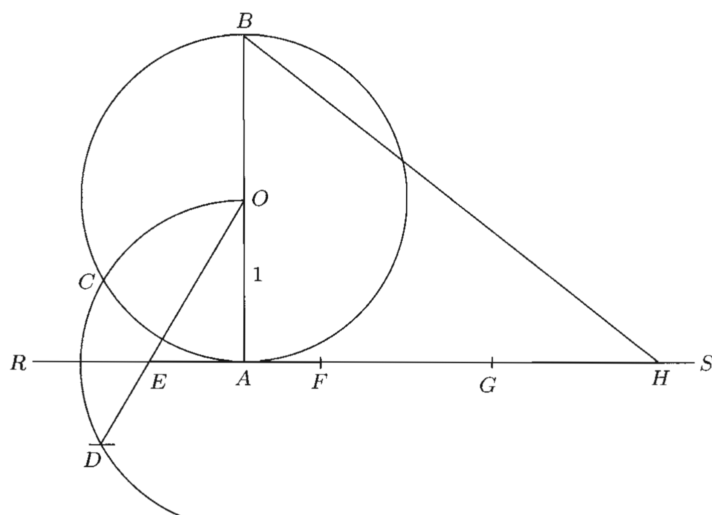



图 13

## 问题 VI–C 组

1. 证明 $BH = \sqrt{\dfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$.

2. 求上题根式的值至 5 位小数, 并把你的结果与 $\pi$ 至 5 位小数的值进行比较.

在 1849 年, 雅可布 · 德 · 盖德尔 (Jakob de Gelder) 利用连分数能作一条长度很接近于 $\pi$ 的线段, 得出的 $\pi$ 近似值. 盖德尔所用的近似值是

$$\frac{355}{113}=\left(3+\frac{4^2}{7^2+8^2}\right)=3.141592\cdots.$$

关于连分数方法与根据此法的几何作图法的细节, 读者可参考 C. D. 欧尔德斯的《连分数》.

虽然这些努力大大增加了表示 $\pi$ 的精确度, 但是没揭露出 $\pi$ 的重要本质的任何新东西, 即 $\pi$ 是不是有理数这一问题. 但是在 1761 年, 德国数学家兰伯特 (Lambert) 证明了 $\pi$ 是无理数, 它不能表示为分数或有尽小数或无限循环小数. 虽然兰伯特的证明结束了求 $\pi$ 有理值的努力, 但是化圆为方问题仍然没有解决, 因为还有许多无理数 (例如 $\sqrt{2}$) 能用直尺与圆规作图.

但是在这个时期中, 欧拉有了一个重要发现, 这个发现导致 150 年后得出这个问题的最终解决. 利用新发明的微积分, 数学家能得出各种函数的无穷级数展开式.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \quad (x \text{ 以弧度为单位})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

于是

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

因此我们可以证明 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. 于是可以把复数

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad 表示为\ re^{i\theta}.$$

如果令 $R_1=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$ (1 的 $n$ 次方根), 那么

$$\begin{aligned}R_1&=e^{i(2\pi/n)},\\ R_2&=e^{i(4\pi/n)}=\left[e^{i(2\pi/n)}\right]^2=R_1^2,\\ R_{n-1}&=e^{2i(n-1/n)\pi}=R_1^{n-1},\\ R_n&=e^{2\pi i}=R_1^n=1.\end{aligned}$$

这再次证明了, 1 的 $n$ 次方根可以写成 $R,R^2,R^3,\cdots$, $R^n=1$, 其中 $R=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$.

再次引用方程 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 令 $x=\pi$, 则 $e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$. 方程 $e^{\pi i}=-1$ 是数学一切公式中最令人惊异的一个, 它涉及数 $e,\pi,i$ 与 1. 这个关系式被林德曼 (Lindemann) 用来最后解决了化圆为方问题.

## 问题 VI–D 组

1. 利用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 无穷级数展开式的 2 项, 计算 $\sin\pi/6$ 与 $\cos\pi/6$ 至 2 位小数, 并把你的结果与从三角函数表中求出的 $\sin\pi/6$ 与 $\cos\pi/6$ 的值进行比较 (利用 $\pi=3.14$).

2. 利用 $e^x$ 无穷级数展开式的 5 项, 计算 $e$ 的值至 2 位小数.

在第 3 个时期, 现代分析的巨大威力被用于这个问题. 在 1873 年, 埃尔米特 (Hermite) 证明了 $e$ 是一个超越数. 代数数是多项式方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 的根, 其中所有系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是整数. 超越数不是代数数, 即超越数不是整数 (或有理数) 系数的多项式方程的根. 例如, 如果 $a_0, a_1, a_2$ 是任意整数, 那么 $a_0e^2 + a_1e + a_2 \neq 0$.

在 19 世纪初, 在引入超越数概念时, 数学家还不能证明, 任一已知数是超越数.

法国数学家刘维尔 (Liouville) 在 1851 年发现了第一个超越数. 它是用无穷级数 $1/10 + 1/10^{2!} + 1/10^{3!} + \cdots$ 表示的. 刘维尔发现了被他证明是超越数的一整类数, 但是 $\pi$ 不包含在此类中. 他还证明了 $e$ 不能是有理系数的二次方程的根, 即 $a_0e^2 + a_1e + a_2 \neq 0$, 其中 $a_0, a_1, a_2$ 是整数.

同时, 德国数学家格奥尔格 · 康托尔 (Georg Cantor) 在 1880 年证明, 几乎一切实数是超越数. 林德曼在 1882 年提出了解决化圆为方问题的最后步,那时他推广了埃尔米特 (Hermite) 得出的结果, 并证明了, 在形如

$$a_0 + a_1e^{\rho_1} + a_2e^{\rho_2} + \cdots = 0$$

的方程中, 指数与系数不但不是整数, 而且也不能都是代数数. 读者可以在伊万 · 尼文 (Ivan Niven) 的《无理数》(*Irrational Numbers*) 中找到证明. 如果把这个结果应用于欧拉方程 $1 + e^{\pi i} = 0$, 因为 1 是代数数, 所以 $\pi i$ 是超越数. 由于代数数构成一个域, 所以任意两个代数

数之积是代数数 (关于证明, 见《无理数》). 因为 $i$ 是代数数 (它是方程 $x^2+1=0$ 的根), 所以 $\pi$ 一定是超越数, 否则 $\pi i$ 是代数数.

因此 $\pi$ 不是任一多项式方程的根, 并且不能用整数的有理运算与求实平方根表示. 所以不能作一个正方形使面积等于一圆. 虽然现在知道了 $\pi$ 是无理数, 但是数学家仍旧对 $\pi$ 的小数展开式中数字分布感到兴趣. 于是利用高速计算机, 求出 $\pi$ 的值至 10000 位小数. 对进一步的细节, 读者可以参考 P. J. 达维斯 (Davis) 的《大数知识》(*Lore of Large Numbers*).

## 问题　VI–E 组

在 VI–C 组问题中, 我们已求出 $\sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}}$ 是 $\pi$ 的近似值. 证明 $\sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}}$ 是一个整数系数的 4 次方程的根.

# 第 VII 章　正多边形的作图问题

另一个关于圆的难对付的问题让从古代到 19 世纪的一些最伟大的数学家为此做出巨大的努力. 这个问题就是把一个圆分成等弧依次把各分点联成为弦, 得出一个正多边形 (等边且等角的多边形).

希腊人能作正 $2^m$ 边形, 其中 $m$ 是大于 1 的整数. 他们还能作正三角形与正 5 边形. 因为用直尺与圆规能平分圆弧, 所以能作正 $3\cdot 2^m$ 边形与正 $5\cdot 2^m$ 边形, 其中 $m$ 是任一正整数. 并且, 希腊人还证明了, 如果能作正 $a$ 边形与正 $b$ 边形, 且 $a$ 与 $b$ 互素 (即 $a$ 与 $b$ 没有大于 1 的公因数), 那么能作正 $a\cdot b$ 边形. 证明要利用求 2 个整数最大公因数的辗转相除法. 在 2 个整数互素的

情形下, 最大公因数是 1, 这个算法能使我们解决下列问题.

已知 2 个互素整数 $a$ 与 $b$, 则存在另外 2 个整数 $k$ 与 $l$, 使得 $ka + lb = 1$. 正如复数那一章所指出, 把一个圆 $n$ 等分等价于作一个 $2\pi/n$ 弧度的弧 (或圆心角). 于是, 如果我们作了正 $a$ 边形与正 $b$ 边形, 那么我们就能作 $2\pi/a$ 弧度与 $2\pi/b$ 弧度的弧. 因此我们就能作 $2\pi l/a$ 弧度与 $2\pi k/b$ 弧度的弧, 其中 $k$ 与 $l$ 是使 $ka+lb=1$ 的整数. 最后我们能作 $2\pi l/a + 2\pi k/b = 2\pi(ka + lb)/ab = 2\pi/ab$ 弧度的弧, 这就证明了能作正 $a \cdot b$ 边形.

因为 3 与 5 互素, 所以能作正 15 边形以及正 $15 \cdot 2^m$ 边形, 其中 $m$ 是正整数. 于是我们能通过叙述一个一般公式来总结希腊人的成就, 该公式指出古代数学家能作哪些正多边形. 如果 $n$ 是一个形如 $2^m \cdot P_1^{r_1} \cdot P_2^{r_2}$ 的整数, 其中 $m$ 是任一非负整数, $P_1$ 与 $P_2$ 是不同的素数 3 与 5, $r = 0$ 或 1, 那么希腊人能作正 $n$ 边形.

## 问题 VII–A 组

1. 作正 $2^m$ 边形, 其中 $m$ 等于 (a) 2, (b) 3, (c) 4.

2. 作正 $3 \cdot 2^m$ 边形, 其中 $m$ 等于 (a) 0, (b) 1, (c) 2.

3. 假设能作正三角形与正 5 边形, 请说明: 怎样由求 2 个整数 $l$ 与 $k$ 使得 $3k + 5l = 1$, 来作正 15 边形. 然后你将怎样作正 30 边形?

4. 根据所学过的知识回答:

(a) 能不能作一个正 $3 \cdot 3$ 边形 (即正 9 边形)?

(b) 如果能作正 $a$ 边形与正 $b$ 边形, 并且 $a$ 与 $b$ 互素, 那么能不能作正 $(a+b)$ 边形? 试证明你的猜想.

古代数学家遗留下的等分圆的问题已经有 2000 多年了. 尽管像费马与欧拉这样著名的数学家研究过这个问题, 但是一直到 18 世纪末, 在高斯 1796 年完全解决前, 这个问题没有更多的进展.

E. T. 贝尔 (Bell) 在他的《数学的发展》(*Development of Mathematics*) 中指出: “高斯一生从事数学研究的原因是, 他在 19 岁时用直尺与圆规作正多边形的惊人发现.” 在这个发现前, 他考虑学习语言学专业. D. E. 史密斯在他的《数学史》中引用了高斯本人的关于他的这项发现的记录.

“那是 1796 年 3 月 29 日, 机会与此毫无关系. 在这以前, 实际上在 1796 年冬天 (我在哥廷根的第一学期), 我已经发现了关于方程 $(x^P-1)/(x-1)=0$ 的根分离为 2 组的方方面面. 在算术范围内认真考虑一切根的相互关系之后, 在布伦瑞克 (Braunschweig) 的假日期间, 那天早上我 (起床前) 以最清楚的方式思考这个关系, 我成功了, 因此立即把它应用于正 17 边形与数值证明.”

柯朗 (Courant) 与罗宾斯 (Robbins) 在他们的书《什么是数学?》(*What Is Mathematics*[1]) 中指出: “他 (高斯) 经常特别自豪地回忆他第一个杰出的功绩. 在他死后, 在哥廷根建立了他的青铜雕像, 雕像底座设计成正 17 边形, 这是彰显其荣誉的最好方式了.” 为什么是正 17

[1] 中译本: 什么是数学, 左平等译, 复旦大学出版社, 2005 年第 2 版.

边形, 下文将会明白.

我们现在来研究高斯的卓越成就. 在本章起头部分, 我们指出了, 如果 $n$ 具有形式 $2^m P_1^{r_1} P_2^{r_2}$, 其中 $P_1 = 3, P_2 = 5, r = 0$ 或 1, 那么希腊人能作正 $n$ 边形. 在 VII–A 组问题中, 曾要求你们作正三角形, 但不作正 5 边形. 于是, 我们首先回忆希腊数学家作正 5 边形的方法.

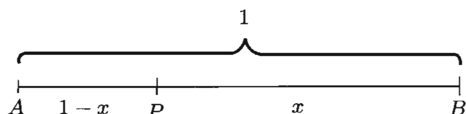



图 14

希腊数学家先将一条单位线段分成中外比, 再作正 5 边形. $P$ 分 $AB$ 为中外比 (如图 14), 即指较大线段 $x$ 是整条线段 1 与较小线段 $(1-x)$ 的比例中项, $1/x = x/(1-x)$, 或 $x^2+x-1=0$. 为了证明这个比怎样与正 5 边形有关, 我们进行如下.

令 $\angle O$ 是单位圆 $36°$ 的圆心角 (正 10 边形一边所对的圆心角), 则 $\angle A = \angle ABO = 72°$. 令 $BD$ 平分 $\angle ABO$.

$$AB = BD = OD = x; \quad AD = 1-x.$$

因为三角形的角平分线分对边为 2 条线段与邻边成比例, $1/x = x/(1-x)$, 并且分 $OA$ 为中外比. 于是我们有 $x^2+x-1=0$, $x = (-1+\sqrt{5})/2$. [为什么我们抛弃 $(-1-\sqrt{5})/2$?]

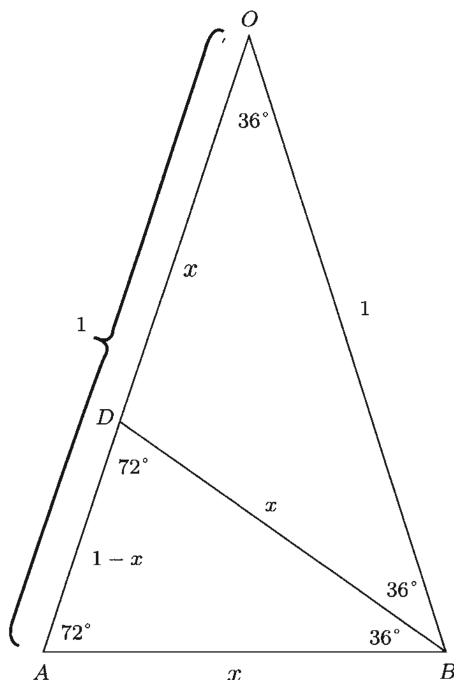



图 15

因此能作正 10 边形的一边, 并且连接间隔的顶点就构成一个正 5 边形.

## 问题 VII–B 组

1. 利用上述方法, 作正 5 边形.

2. 证明: 如图 16, 如果 $CD$ 平分 $\angle ACB$, 那么 $(AC/CB) = (AD/DB)$.

[提示: 经过 $A$ 作一直线平行于 $CD$, 令这条直线与

$BC$ 的延长线相交于 $E$. 然后利用定理: 平行于三角形一边的直线分其它两边成比例.]

图 16

希腊数学家作正多边形所用的方法不能普遍化, 反之, 已经证明高斯的方法是足够普遍的, 使我们能叙述任一正多边形可作图性的充分必要条件. 我们首先回忆并推广一些原理, 这些原理可用来回答立方倍积三等分角与化圆为方的问题.

我们已指出, 不可约 3 次方程 (没有有理根的 3 次方程) 的根不能用方程系数作有理运算与求平方根表示出来. 我们现在将推广这个定理. 如果在含有理系数的多项式方程 $f(x) = 0$ 中, $f(x)$ 不能分解为 2 个次数等于或大于 1 的有理多项式因式, 那么在有理数域中, 称这个方程是不可约的. 于是能证明, 只有当 $n$ 是 $2^h$ 时 ($h$ 是非负整数), $n$ 次不可约方程的根才能由方程系

数作有理运算与求实平方根表示出来. 关于这个定理的证明, 读者可以参考 F. 克莱因 (Klein) 等人的《初等几何的著名问题》(*Famous Problems of Elementary Geometry*) ①. 因此, 如果不可约方程的系数表示已知线段的长度, 并且方程的次数不等于 $2^h$, 那么不能用直尺与圆规作方程的根.

我们还学会了, 能用解方程 $x^n-1=0$ 来求 1 的 $n$ 次方根. 如果把 $(x^n-1)$ 除以 $(x-1)$, 那么得 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$. 方程 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ 称为割圆方程, 除根 $x=1$ 以外, 它的根与 $x^n-1=0$ 的根一样. 并且 1 的 $n$ 次方根构成一个群, 能按以下序列排列: $R, R^2, R^3, \cdots, R^n=1$, 其中 $R=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$, 并且 $R^{-1}$ 或 $1/R=\cos(2\pi/n)-i\sin(2\pi/n)$. 最后, 1 的各个根在复平面内作图时将把单位圆分成 $n$ 条相等的弧. 因此我们可以断言, 只有当割圆方程是一个 $2^h$ 次不可约方程时, 才能作正 $n$ 边形. 于是 $n-1=2^h$ 或 $n=2^h+1$.

我们将需要的另一个定理是二次方程的根与系数之间关系的推广. 如果 $r_1$ 与 $r_2$ 是 $x^2+bx+c=0$ 的根, 那么 $r_1+r_2=-b$ 与 $r_1\cdot r_2=c$. 一般地可以证明, 如果 $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+$

① 中译本: 初等几何的著名问题, 沈一兵译, 高等教育出版社, 2005 年 7 月出版.

$a_{n-1}x + a_n = 0$ 的根, 那么

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -a_1,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} r_i r_j = a_2 \quad (i < j),$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} r_i r_j r_k = -a_3 \quad (i < j, i < k, j < k),$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_1 r_2 \cdots r_n = (-1)^n a_n.$$

$\sum r_i r_j$ 表示任意两根乘积构成的所有各项之和.

## 问题　VII–C 组

1. 如果 $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ 的根是 $r_1, r_2, r_3$, 那么我们可以把方程写成 $(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$ 的形式. 把方程左边的各因式相乘, 证明

$$r_1 + r_2 + r_3 = -a_1,$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = a_2,$$

$$r_1r_2r_3 = -a_3.$$

2. 对方程 $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, 重复上题解题过程.

我们现在对 $n$ 的一些值利用高斯方法. 为了研究作正 5 边形的可能性, 我们用 $n = 5$, 并令 $R = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$.

因此 $R^5-1=0$, 并且 (因为 $R\neq 1$)

$$\frac{R^5-1}{R-1}=R^4+R^3+R^2+R+1=0.$$

割圆方程 $R^4+R^3+\cdots+1=0$ 是不可约的, 它的次数具有 $2^h$ 的形式. 能作出这个方程的根, 我们现在来完成作图.

我们将割圆方程的根以下列形式配对:

$$\begin{aligned} y_1&=R+\frac{1}{R}=R+R^4\\ &=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}\right)\\ &=2\cos\frac{2\pi}{5},\\ y_2&=R^2+\frac{1}{R^2}=R^2+R^3=2\cos\frac{4\pi}{5}, \end{aligned}$$

因此

$$y_1+y_2=R+R^2+R^3+R^4=-1,$$

与

$$y_1\cdot y_2=R^3+R+R^4+R^2=-1.$$

$y_1$ 与 $y_2$ 满足方程 $y^2+y-1=0$ (为什么?) 与 $y_1=(-1+\sqrt{5})/2$ (这是以前得出的结果). (注意, 因为 $y_1=2\cos(2\pi/5)\geqslant 0$, 所以 $y_1=(-1+\sqrt{5})/2$, 并且因为 $y_2=2\cos(4\pi/5)<0$, 所以 $y_2=(-1-\sqrt{5})/2$.) 因此, $\cos 2\pi/5=(-1+\sqrt{5})/4$, 能作正 5 边形 (因为当且仅当能作 $\angle A$ 时, 才能作 $\cos A$). 我们进行如下:

在半径为 1 的圆内, 作 2 条垂直直径. 以 $C(OA'$ 的中点) 为圆心与以 $CB$ 为半径作一弧与 $OA$ 相交于

$D$. 于是, 如果 $s_n$ 表示正 $n$ 边形的一边, 那么 $s_{10} = OD, s_5 = BD$. 注意, 我们从 $2^2$ 次方程开始, 得出一个 2 次方程.

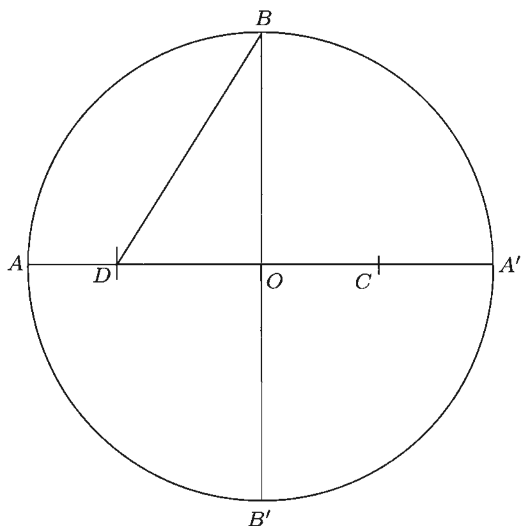



图 17

## 问题 VII–D 组

1. 证明 $y_1$ 与 $y_2$ 满足方程 $y^2 + y - 1 = 0$.

2. 证明 $s_5 = BD$. 提示: 首先证明 $OD = (-1 + \sqrt{5})/2 = s_{10}$. 然后证明, 在单位圆内 $s_5^2 = 1 + s_{10}^2$ 或 $s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2$.

我们现在将研究 $n = 7$ 的情形. 希腊人与他们以后的数学家试图作 7 边形, 但是没有成功. 在能作正

3, 4, 5, 6, 8, 10 边形后, 他们遇到了挫折. 为什么不能作正 7 边形或正 9 边形? 为了回答这个问题, 我们从 1 的 7 次方根开始, $R = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$. 于是割圆方程变成

$$\frac{R^7 - 1}{R - 1} = R^6 + R^5 + R^4 + R^3 + R^2 + R + 1 = 0.$$

以上割圆方程导出一个不可约方程. 因此不能作正 7 边形. 为了证明这一点, 我们将根配对如下:

$$\begin{aligned} y_1 &= R + \frac{1}{R} = R + R^6 = 2\cos\frac{2\pi}{7}, \\ y_2 &= R^2 + \frac{1}{R^2} = R^2 + R^5, \\ y_3 &= R^3 + \frac{1}{R^3} = R^3 + R^4. \end{aligned}$$

于是 $y_1 + y_2 + y_3 = R + R^2 + R^3 + R^4 + R^5 + R^6 = -1$, 类似地, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_4 = (R^3 + R + R^6 + R^4) + (R^4 + R^2 + R^5 + R^3) + (R^5 + R + R^6 + R^2) = -2, y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = 1$. 因此 $y_1, y_2, y_3$ 满足 $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

这个 3 次方程仅有的有理根是整数, 它是 1 的因数. 但是 $+1$ 与 $-1$ 两者都不是这个方程的根. 因此这个方程是不可约的 3 次方程, 不能作出它的根. 于是不能作 $y_1 = 2[\cos(2\pi/7)]$, 也就不能作出正 7 边形.

正如阿基米德叙述用圆规与其上有两个标记的直尺三等分角的方法一样, 他也给出了用相同工具作 7 边形的最巧妙方法. 可以在阿斯格尔 · 阿波伊 (Asger Aaboe) 的《古代数学史中的事件》(*Episodes from the*

*Early History of Mathematics*) 中找到阿基米德 7 边形作法的叙述.

对于 $n=9$ 的情形, 割圆方程变成 $x^8+x^7+\cdots+x+1=0$. 因为方程的次数是 $2^3$, 所以似乎我们能作它的根, 于是能作正 9 边形.

但是 $x^9-1$ 不但可被 $x-1$ 整除, 而且可被 $x^3-1$ 整除.

$$\frac{x^9-1}{x^3-1}=x^6+x^3+1.$$

除了 1 的立方根外, 方程 $x^6+x^3+1=0$ 有与 $x^9-1=0$ 一样的根. 因此, 如果 $R=\cos(2\pi/9)+i\sin(2\pi/9)$, 那么方程 $x^6+x^3+1=0$ 的根是 $R,R^2,R^4,R^5,R^7$ 且 $R^8\cdot R^3,R^6,R^9=1$ 是 $x^3-1=0$ 的根, 因为 $(R^3)^3=R^9=1,(R^6)^3=R^{18}=1$. 我们对方程 $x^6+x^3+1=0$ 的根作下列配对:

$$\begin{aligned}
y_1&=R+R^8=R+\frac{1}{R}\\
&=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}\right)=2\cos\frac{2\pi}{9},\\
y_2&=R^2+R^7=R^2+\frac{1}{R^2}\\
&=\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{9}-i\sin\frac{4\pi}{9}\right)\\
&=2\cos\frac{4\pi}{9},\\
y_3&=R^4+R^5=R^4+\frac{1}{R^4}\\
&=\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{9}-i\sin\frac{8\pi}{9}\right)\\
&=2\cos\frac{8\pi}{9}.
\end{aligned}$$

于是 $y_1+y_2+y_3=R+R^2+R^4+R^5+R^7+R^8$, 这表示 $x^6+x^3+1=0$ 的各根之和. 因此 $y_1+y_2+y_3=-a$, 其中 $a$ 是 $x^5$ 的系数; 并且 $y_1+y_2+y_3=0$. 类似地, $y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=-3, y_1y_2y_3=-1$.

因此 $y_1, y_2, y_3$ 是方程 $y^3-3y+1=0$ 的根.

因为 $+1$ 与 $-1$ 都不是 $y^3-3y+1=0$ 的根, 所以这个方程是不可约 3 次方程, 不能作出它的根. 因此, 不能用直尺与圆规作出正 9 边形.

## 问题 VII–E 组

1. 证明 $R^3$ 与 $R^6$ 是方程 $x^2+x+1=0$ 的根, 求 $R^3+R^6$ 的值.

2. 利用上题的信息, 证明

(a) $y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=-3$.

(b) $y_1y_2y_3=-1$.

3. 在 V–A 组问题第 2 题中, 要求你确定能不能三等分 $120°$ 角. 这个问题引导出与作正 9 边形的相同方程 $(y^3-3y+1=0)$. 从几何角度证明这 2 个问题是等价的.

我们现在回到以前提出的一个问题. 虽然割圆方程 $x^8+x^7+\cdots+1=0$ 的次数是 $2^3$, 但是我们不能作出这个方程的所有根. 我们现在看到, 这是由于这个方程是可约的. 由对作正 9 边形问题的分析, 我们看出 $x^8+x^7+\cdots+1=(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$. 于是割圆方程在什么条件下是不可约的, 在什么条件下是可约的, 就成为

一个重要问题. 如果我们研究到目前为止所考虑的这 2 种情形, 其中 $n$ 具有 $2^h+1$ 的形式 $(n=5, n=9)$, 那么我们注意到, 当 $n$ 是素数时, 作图是可能的, 当 $n$ 是合数时, 作图是不可能的. 事实上可以证明, 当 $n$ 具有形式 $2^h+1$ 且 $n$ 是素数时, 割圆方程是 $2^h$ 次的且不可约, 能把单位圆 $n$ 等分; 但是, 反之, 如果 $n$ 具有形式 $2^h+1$ 且 $n$ 不是素数, 那么割圆方程是可约的, 不能用直尺与圆规把单位圆 $n$ 等分.

在证明了 "如果 $2^h+1$ ($h$ 是非负整数) 是一个素数, 那么 $h=2^m$ (其中 $m$ 是非负整数)" 之后, 我们能更前进一步. 因为, 如果 $h$ 有大于 1 的奇因数, 并且 $h$ 能写成 $rs$ 的形式, 其中 $r$ 与 $s$ 是正整数, $s$ 是大于 1 的奇数, 那么 $2^h+1=(2^r)^s+1$. 现在当 $s$ 是奇数时, $a^s+b^s$ 能因式分解:

$$a^s+b^s=(a+b)(a^{s-1}-a^{s-2}b+a^{s-3}b^2-\cdots+b^{s-1}).$$

于是

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

$$(2^r)^s+1=(2^r+1)(2^{r(s-1)}-2^{r(s-2)}+2^{r(s-3)}-\cdots+1).$$

因为 $r$ 与 $s$ 是正整数, $s\geqslant 2$, 所以 $2^h+1$ 将有 2 个因数, 每个都大于 1, 这与假设 $2^h+1$ 是素数矛盾; 因此, 如果 $2^h+1$ 是一个素数, 那么它有 $2^{2^m}+1$ 的形式, 其中 $m$ 是一个非负整数.

数 $2^{2^m}+1$ 在数学史中多次出现过. 它称为 "费马" 数, 以第一流的法国数学家 P. 费马 (1601—1665) 的名字

命名. 欧几里得给出了素数有无限多个的巧妙证明. 从那时起, 数学家努力寻找一个总是能给出素数的公式, 虽然不是一切素数.

费马曾猜想, 形如 $2^{2^m}+1$ 的数是一个素数. 虽然他相信这个命题成立, 但是他指出, 他不能证明它. 事实上, 当 $m=0,1,2,3,4$ 时, $2^{2^m}+1$ 分别是 $3,5,17,257,65537$ (其中每个数都是素数). 但是欧拉证明了 $2^{2^5}+1$ 能因数分解. 可用下列方法证明 641 是 $2^{32}+1$ 的因数: $641=5\cdot 2^7+1$, 所以641 整除 $(5\cdot 2^7+1)(5\cdot 2^7-1)=5^2\cdot 2^{14}-1$, 641 整除 $(5^2\cdot 2^{14}-1)(5^2\cdot 2^{14}+1)=5^4\cdot 2^{28}-1$. 但是 $641=5^4+2^4$, 所以 641 也整除 $5^4\cdot 2^{28}+2^{32}$. 因此 641 整除 $(5^4\cdot 2^{28}+2^{32})-(5^4\cdot 2^{28}-1)=2^{32}+1$.

## 问题 VII–F 组

用实际做除法证明 641 是 $2^{2^5}+1$ 的因数.

总结一下, 我们现在可以叙述, 如果 $n$ 是一个形如 $2^{2^m}+1$ 的素数, 那么能作正 $n$ 边形. 我们已经证明了, 对 $m=0$ 与 $m=1$ 怎样作正多边形, 对于 $m=2$, $2^{2^2}+1=17$. 在欧几里得与高斯之间的 2000 年中, 从来没有人猜想过能作正 17 边形. 我们现在可以看出, 为什么高斯要求把雕像底座做成正 17 边形的形式.

我们现在将叙述高斯作正 17 边形所用方法的梗概. 割圆方程是 $R^{16}+R^{15}+\cdots+R+1=0$. 为了求这个方程的各个根, 我们先求出一个整数 $g$, 使得所有的根能依次排列为 $R, R^g, R^{g^2}, \cdots$, 其中 $R$ 是 1 的 17 次元

根. 如果对于一切整数 $e < n, R^e \neq 1. R^n = 1$, 那么 $R$ 是 1 的 $n$ 次元根.

## 问题　VII–G 组

1. 证明 $g = 2$ 不能给出 $R^{16} + R^{15} + \cdots + R = 0$ 的所有根: $R, R^2, \cdots, R^{16}$.

2. 证明 $g = 3$ 按以下次序给出所有根:

$$R, R^3, R^9, R^{10}, R^{13}, R^5, R^{15}, R^{11},$$
$$R^{16}, R^{14}, R^8, R^7, R^4, R^{12}, R^2, R^6.$$

我们在本组问题第 2 题的根序列中选出交错的项, 得出

$$y_1 = R + R^9 + R^{13} + R^{15} + R^{16} + R^8 + R^4 + R^2,$$
$$y_2 = R^3 + R^{10} + R^5 + R^{11} + R^{14} + R^7 + R^{12} + R^6,$$
$$y_1 + y_2 = -1$$

与

$$y_1 y_2 = -4.$$

$y_1$ 与 $y_2$ 满足方程 $y^2 + y - 4 = 0$. 我们在 $y_1$ 中取交错的项

$$z_1 = R + R^{13} + R^{16} + R^4, \quad z_2 = R^9 + R^{15} + R^8 + R^2,$$

在 $y_2$ 中取交错的项

$$w_1 = R^3 + R^5 + R^{14} + R^{12}, \quad w_2 = R^{10} + R^{11} + R^7 + R^6,$$

于是,

$$z_1 + z_2 = y_1, \quad w_1 + w_2 = y_2,$$
$$z_1 \cdot z_2 = -1, \quad w_1 \cdot w_2 = -1$$

与

$$z^2 - y_1 z - 1 = 0, \quad w^2 - y_2 w - 1 = 0.$$

最后在 $z_1$ 中取交错的项

$$v_1 = R + R^{16}, \quad v_2 = R^{13} + R^4.$$

于是

$$v_1 + v_2 = z_1,$$
$$v_1 \cdot v_2 = w_1.$$

并且

$$v_1, v_2 \text{ 满足 } v^2 - z_1 v + w_1 = 0,$$
$$R, R^{16} \text{ 满足 } r^2 - v_1 r + 1 = 0.$$

因此, 我们能由解一系列二次方程求出 $R$.

但是, $R$ 有 16 个可能值, 因为有 1 的 16 个 17 次元根. 我们将有 $R = \cos(2\pi/17) + i\sin(2\pi/17)$. 于是 $1/R = \cos(2\pi/17) - i\sin(2\pi/17), v_1 = R + 1/k = 2\cos(2\pi/17), v_2 = R^4 + 1/R^4 = 2\cos(8\pi/17)$. 因为 $2\pi/17$ 与 $8\pi/17$ 两者均小于 $\pi/2$, 并且在第一象限内, 一角的余弦值随着角度数的增加而减少, 所以我们看出

$$v_1 > v_2 > 0. \quad \text{因此} \quad z_1 = v_1 + v_2 > 0.$$

类似地

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \left(R^3 + \frac{1}{R^3}\right) + \left(R^5 + \frac{1}{R^5}\right) \\
&= 2\cos\frac{6\pi}{17} + 2\cos\frac{10\pi}{17} \\
&= 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17},
\end{aligned}
$$

因为

$$
\left|\cos\frac{6\pi}{17}\right| > \left|\cos\frac{7\pi}{17}\right|, \quad \text{所以 } w_1 > 0.
$$

并且

$$
\begin{aligned}
y_2 = &\left(R^3 + \frac{1}{R^3}\right) + \left(R^5 + \frac{1}{R^5}\right) \\
&+ \left(R^6 + \frac{1}{R^6}\right) + \left(R^7 + \frac{1}{R^7}\right) \\
= &\, 2\cos\frac{6\pi}{17} + 2\cos\frac{10\pi}{17} + 2\cos\frac{12\pi}{17} + 2\cos\frac{14\pi}{17}.
\end{aligned}
$$

$y_2$ 中只有第一项是正项, 并且

$$
\left|\cos\frac{6\pi}{17}\right| < \left|\cos\frac{5\pi}{17}\right| = \left|\cos\frac{12\pi}{17}\right|,
$$

因此 $y_2 < 0$.

因为 $y_1 y_2 = -4$, 所以 $y_1 > 0$.

因此, 我们现在求出下列各值:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17} - 1\right),$$
$$y_2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{17} - 1\right),$$
$$z_1 = \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2},$$
$$w_1 = \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2}.$$

利用勾股定理, 能作这 4 条线段, 并能作方程 $v^2 - z_1 v + w_1 = 0$ 的根. 因为较大的根 $v_1 = 2\cos(2\pi/17)$, 所以能作正 17 边形.

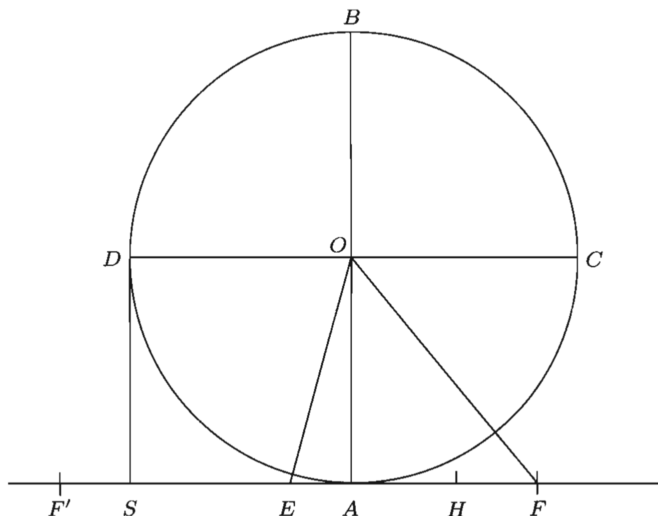



图 18

作正 17 边形的一个方法如下: 在单位圆内作 2 条垂直直径 $AB$ 与 $CD$. 令 $A$ 与 $D$ 处的两切线相交于 $S$.

把 $AS$ 4 等分, 令 $AE = \frac{1}{4}AS$. 令以 $E$ 为圆心和 $OE$ 为半径的圆与 $AS$ 相交于 $F$ 与 $F'$. 令以 $F$ 为圆心与 $FO$ 为半径的圆与 $AS$ 相交于 $H$ (在 $F'F$ 的外部), 以 $F'$ 为圆心与 $F'O$ 为半径的圆与 $AS$ 相交于 $H'$ (在 $F'$ 与 $F$ 之间). 于是我们证明了 $AH = z_1$ 与 $AH' = w_1$.

最后利用第 I 章所述的 2 次方程的根的作法, 我们能作 $v^2 - z_1v + w_1 = 0$ 的较大根 $v_1$. 作一圆, 使其直径 $BD$ 是连接点 $B(0,1)$ 与 $D(z_1, w_1)$ 而成. 于是圆与 $x$ 轴的交点 $G$ 与 $F$ 的横坐标, 将是 $v^2 - z_1v + w_1 = 0$ 的根, $v_1 = 2\cos(2\pi/17) = OF$.

[对这个作图所采用的一切坐标系, 一定要利用相同的单位.]

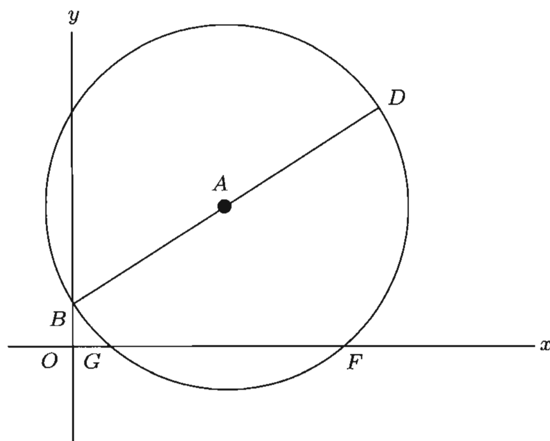



图 19

最后我们来作正 17 边形的一边: 在 $x$ 轴上标出

$OF = v_1$. 令 $M$ 是 $OF$ 的中点. 作 $MP \perp OF$. 则 $AP$ 是正 17 边形的一边.

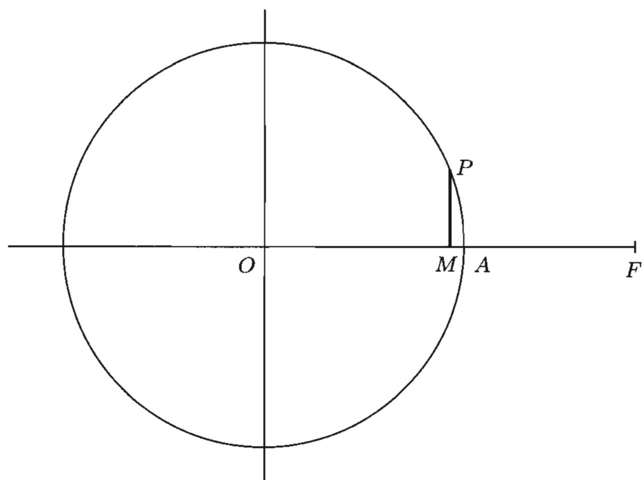



图 20

## 问题　VII–H 组

1. 由解适当的二次方程, 证明

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17} - 1\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{17} - 1\right),$$

$$z_1 = \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2},$$

$$w_1 = \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2}.$$

2. 利用图 18 证明

(a) $OE = \frac{1}{4}\sqrt{17}$,

(b) $AF = \frac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}y_1$,

(c) $AF' = \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}y_2$,

(d) $OF = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2}$, $OF' = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2}$,

(e) $AH = \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2} = z_1$,

(f) $AH' = \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2} = w_1$.

3. 利用图 19 证明 $OF = v_1 = 2\cos(2\pi/17)$.

4. 利用图 20 证明 $\angle MOP = 2\pi/17$.

5. 从单位圆开始, 作

(a) $z_1$ 与 $w_1$.

(b) $v_1$.

(c) $2\pi/17$ 弧度的角.

(d) 正 17 边形.

这个作法可以推广如下:

如果 $n$ 是一个形如 $2^{2^m}+1$ 或 $2^h+1$ 的素数, 那么 1 的 $(n-1)$ 个 $n$ 次虚根能分成 2 个集合, 每个集合有 $2^{h-1}$ 个根, 这 2 个集合又分成 2 个集合, 每个集合有 $2^{h-2}$ 个

根, 等等, 一直我们得到各对 $R, 1/R; R^2, 1/R^2$ 等. 于是我们将有一系列 2 次方程, 其中任一方程的系数只依赖于这系列方程中的前一个方程的根. 因此 $x^n = 1$ 的根能用有限次有理运算与求实平方根而求出, 如果 $n$ 是一个形如 $2^{2^m}+1$ 的素数, 那么能作正 $n$ 边形.

我们现在可以叙述一个公式, 它将正确地告诉我们, 能作怎样的正多边形. 正 $n$ 边形可作图, 当且仅当 $n$ 是形如 $2^s \cdot p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots$ 的数, 其中 $s$ 是非负整数, $p_1, p_2, \cdots$ 是形如 $2^{2^m}+1$ 的不同素数, 并且每个 $r = 0$ 或 1.

## 问题　VII–I 组

把边数 $n \leqslant 100$ 的能作图的 24 个正多边形列表.

还有一个未解决的问题 —— 对 $m$ 的怎样的值, $2^{2^m}+1$ 是素数? 我们知道, 对于 $m = 0, 1, 2, 3, 4$, 费马数是素数, 事实上, 我们作了正 3, 5, 17 边形. 对于 $m = 3, n = 257$, 并且对于 $m = 4, n = 65537$, 还完成了分析. 发表在《现代数学课题专论》(*Monographson Topics of Modern Mathematics*) 中的尺规作图讨论文章中, L. E. 迪克森 (Dickson) 指出 “利霍洛 (Richelot) 在《克雷尔数学杂志》(*Crelle's Journal für Mathematik,* 1832) 上发表的长篇论文, 阿福尔特 (Affolter) 与帕斯卡 (Pascal) 在 (*Rindicinti della R. Accademia di Napoli,* 1887) 上发表的几何方面论文相当详细地讨论了正 257 边形.

赫米斯 (Hermes) 在《哥廷根新闻》(*Gottingen*

*Nachridten*, 1894) 上讨论了正 $2^{16}+1=65537$ 边形.”

在 1961 年 4 月出版的《科学美国人》(*Scientific American*) 杂志中, 马丁 · 加德纳 (Martin Gardner) 叙述了 H. M. S. 考克斯特 (Coxeter) 在最近出版的书《几何学引论》(*An Introduction to Geometry*) 中讨论过的一些题目. 加德纳援引考克斯特的内容大意是, 在哥廷根 (Göttingen) 大学有一大箱手稿, 该手稿指出怎样作正 65537 边形. 加德纳还写道: “只有对一类称为费马数的特殊素数, 即能表示为 $2^{2^n}+1$ 的素数, 才能以古典的形式作出具有素数边的多边形. 只知道 5 个这样的素数 ——$3,5,17,257,65537$. 考克斯特告诉我们, 成功地作出正 65537 边形的那个苦行僧在这个问题上花费了 10 年时间.”

正如欧拉所证明, 当 $m=5$ 时, $2^{2^m}+1$ 有因数 641. 迪克森指出, 对于 $n=6,7,8,9$, $2^{2^m}+1$ 不是素数. 对于下一种情形 $n=10$, 还没有确定这个费马数是不是素数. 一个非常好的结果是, 只有对于 $m<5$ 的值, $2^{2^m}+1$ 才是素数. 在这种情形下, 能指出怎样的多边形是可作图的一个公式是

$$n=2^s p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot p_3^{r_3}\cdot p_4^{r_4}\cdot p_5^{r_5};\quad r=0 \text{ 或 } 1 \quad \text{与 } p_1=3,$$
$$p_2=5, p_3=17, p_4=257, \quad \text{与 } p_5=65537.$$

但是, 还没有证明, 对于 $m\geqslant 5$, $2^{2^m}+1$ 是合数; 在这个问题得到解答之前, 我们还不能说作正多边形的问题完全解决了.

迪克森以下文来结束他的关于 “尺规作图” 的论

文: "高斯在《算术研究》(*Desquisitione Arithmeticae*) 中最早给出正 $p$ 边形在几何上内接一圆的证明, 其中 $p$ 是形如 $2^h+1$ 的素数, 马赫 (Mach) 把《算术研究》译成德文. [注: 高斯虽然是德国人, 但是用拉丁文写作, 正如他的前辈牛顿与欧拉一样.] 在马赫语《算术研究》的第 447 页上, 高斯指出, 如果 $n$ 包含不具有 $2^h+1$ 形式的奇素因数, 或者包含素数 $2^h+1$ 的平方, 那么正 $n$ 边形不内接一圆, 但是没有看到高斯对此给出证明." 因此高斯似乎建立了能作正 $n$ 边形的充分条件 $n=2^s \cdot p_1^r \cdot p_2^r \cdots$ , 其中 $p_1, p_2, \cdots$ 是形如 $2^{2^m}+1$ 的不同素数. 但是没有根据证明, 这个条件是能作正多边形的必要条件.

## 问题 VII–J 组

1. 数 $2^{2^{10}}+1$ 有多少位数字? [提示: 利用 $\log_{10} 2 = 0.301$.]

2. 如果 $n$ 是一个能用直尺与圆规作图的角的度数, 并且 $n$ 是一个整数, 证明 $n \geqslant 3$.

# 第 VIII 章　最后的评述

---

用直尺与圆规作图的历史十分清楚地表明,初等数学各分支 (代数学, 几何学, 三角学与分析) 是紧密联系的. 数学中的数系的发展进程就像把统一的情节贯穿到整部小说中一样. 尼文 (Niven) 在《有理数与无理数》(*Numbers: Rational and Irrational*) 中的图很巧妙地总结了这种情况 (见图 21).

当 $h$ 是非负整数时, $2^h$ 次不可约方程的根是可作图的数. 可作图的数包括能用有理运算与求实平方根表示的一切数. 但是虚数在解正多边形作图问题中起了重要的作用.

任意一实数可以表示为无限小数. 如果可作图的数是有理数, 那么它可以表示为循环小数. 注意到以下一点是有趣的, 如果可作图的数是一个二次无理数

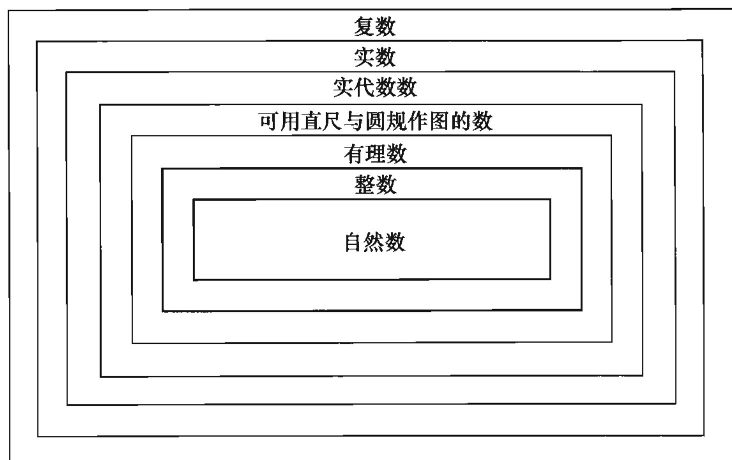



图 21

(即形如 $(P \pm \sqrt{D})/Q$ 的数, 其中 $P, Q, D$ 是整数, $Q \neq 0$, $D > 0$ 且不是一个完全平方数), 那么这个数还有循环展开式, 不是小数展开式, 当然是连分数展开式. 拉格朗日 (Lagrange) 在 1770 年证明了下列定理: "任一个二次无理数都有一个连分数展开式, 它从某一点起向前循环." (见欧尔德斯的《连分数》). 反之, 任一无限循环小数可以表示为有理数, 并且任一无限循环连分数可以表示为二次无理数. 因此在可作图性与周期性之间有密切的联系.

许多人有一个错误的观点, 即在数学家指出某个作图 (例如 3 等分 60° 角) 是不可能时, 就断定这个问题还没有找到解答, 所以 "3 等分角" 与 "化圆为方" 的问题仍然存在. 但是我们知道他们的努力是徒劳的, 因为

证明一种作图的不可能性正像证明作图是可能的, 然后提出作法一样都是一种结论.

当发现所寻求的结果是不可能时, 数学史中就有另外一些机会. 高斯证明了每个多项式方程有复数根. 古代的数学家能解一次方程与二次方程. 事实是, 求这些方程的根的公式, 是用对系数的有理运算与求平方根表示的. 因此解一次方程 $ax + b = c\,(a \neq 0)$ 的公式是 $x = (c - b)/a$, 解 2 次方程 $ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$ 的公式是

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

直到 16 世纪, 在一些意大利数学家卡尔丹 (Cardan), 塔塔格利亚 (Tartaglia) 与费拉利 (Ferrali) 得出解 3 次方程与 4 次方程的公式时, 情况就是这样. 这些公式只包括有理运算与求方根 (对 3 次方程求立方根, 对 4 次方程求 4 次方根). 因此我们说 1—4 次方程能 “用根式解”.

这就促使数学家寻找一个公式, 能给出任一 5 次方程的根. 只是自然地希望, 公式将包括有理运算与求 5 次方根. 但是求这种解法的一切努力都失败了. 最后, 挪威数学家阿贝尔 (Abel) (1802—1829) 证明了, 5 次方程不能用根式解. 此后不久, 法国数学家伽罗瓦 (Galois) 证明了下列一般定理: $n \geqslant 5$ 次的代数方程不能用根式解. 在证明这个定理的过程中, 伽罗瓦发展了变换群理论, 该理论构成了现代代数学的重要部分.

希腊数学家也已经确定了一些 (涉及数系的) “作

图" 的不可能性. 欧几里得证明了不能有一个最大素数, 即已知一个素数, 则存在一个较大素数. 希腊人还证明了, 正方形的对角线与边的比 ($\sqrt{2}$) 不能写成 $a/b$ 的形式, 其中 $a$ 与 $b$ 是整数. 为了证明圆周长与其直径的比 ($\pi$) 不能写成 $a/b$ 的形式花费了数千年的时间.

为了说明 "未解决" 的问题与有上述形式解的问题之间的区别, 我们将考虑一些未解决问题的例子, 我们已经遇到一个未解决问题, 即: 当 $h > 4$ 时, 有没有形如 $2^{2^h}+1$ 的任何素数? 另一个未解决的问题是哥德巴赫 (Goldboch) 猜想 —— 每一个大于 2 的偶数是 2 个素数之和 (1 不认为是素数, 因此限制 "大于 2"). 哥德巴赫在 1742 年给欧拉的信中提出了这个问题. 欧拉不能给出解答, 甚至时至今日, 这个问题还没有一个完全的解答[①].

最著名的未解决问题之一称为费马大定理, 它能用初等概念表示. 这个定理是指: 不存在任何正整数 $x, y, z$, 使得 $x^n + y^n = z^n$, 其中 $n$ 是大于 2 的整数. 当然, 如果 $n = 2$, 那么 $x^2 + y^2 = z^2$ 有很多整数解, 例如 $x = 3, y = 4, z = 5$ 或 $x = 5, y = 12, z = 13$. 但是对于 $n = 3$, 不能求出 $x^n + y^n = z^n$ 的整数解.《匈牙利问题集 II》(*Hungarian Problem Book* II) (p. 31) 在讨论这个问题的求解时, 作下列注解: "已知命题对 $n < 2003$ 成

[①] 1966 年, 中国数学家陈景润证明了: 大偶数表示为一个素数及一个不超过 2 个素数的乘积之和. 这个结果在世界数学界引起了轰动, 被公认为是对哥德巴赫猜想的重大贡献, 是筛法理论光辉的顶点, 被国际数学界称为陈氏定理.—— 译者注.

立, 在 1961 年对一切小于 4002 的素指数成立. 尽管经过许多著名数学家的努力, 但是费马猜想至今没有找到证明."[1]

费马坚持认为, 他有这个猜想的最出色的证明, 但是在他读的书 [希腊数学家丢番图 (Diophantus) 的数论书] 书页边缘空白太小, 不能写出这个证明. 费马的 "证明" 从未找到, 数学家至今不能提供任何证明, 尽管利用了比费马的处理方法更加现代与强有力的方法. 可能是这样的: 费马有一个数学家可以承认的证明, 或者说在费马的证明中也许有缺陷. 有这样的例子, 著名数学家给出的证明后来被发现有缺点. 关于费马是否有费马大定理的证明还是一个未解决的问题.

未解决的问题与有了解但其解表明某个 "作图" 是不可能的这类的问题之间的区别是明显的. 还有一个别的因素要考虑. 库尔特 · 哥德尔 (Kurt Gödel) 1931 年证明了, 在任何一个数学体系中, 可能有这样的命题, 它们的正确性不能确定. 也许费马大定理就是这样一个命题.

在试图求解问题时, 人们还应考虑各种可能性. 我们能证明解存在, 并实际地给出解答; 我们能证明没有解, 或者人们根据提供参考框架的数学体系中的公理证明这个命题是不可判定的.

---

[1] 在 20 世纪末, 英国数学家安德鲁 · 怀尔斯 (Andew Wiles) 用 7 年时间进行研究, 最终证明了费马大定理. 他的证明动用了现代数学的许多最为深刻的结果与方法.1998 年他因而荣获了有数学诺贝尔奖之称的菲尔兹特别荣誉奖.1996 年他还荣获了沃尔夫奖.—— 译者注.

1963 年 12 月纽约时报 (*The New York Times*) 发表的一篇文章说明了最后这种可能性. 自然数的个数是无限的. 有理数的个数也是无限的. 因为有理数集能与自然数集成 1—1 对应, 所以我们说这 2 个集合有相同的基数. 能与自然数集成 1—1 对应的任一无限数集称为可数集或可列集. 我们用 $\alpha$ 表示这样的数集的基数. 康托尔证明了, 实数 (有理数与无理数) 集的基数大于 $\alpha$. 我们称这个基数为 $\beta$. 在集合论中有一个未解决的问题: "有没有任一大于 $\alpha$ 且小于 $\beta$ 的超限数?" 纽约时报的文章叙述斯坦福 (Stanford) 大学数学家泡尔丁 · 科恩 (Paul J. Cohen) 的研究, 他证明了, 根据集合论的公理, 大于 $\alpha$ 且小于 $\beta$ 的数的存在问题是不可判定的. 科恩教授的成就还发表在 1964 年 1 月出版的《科学美国人》杂志上 (*Scientific American*) (科学与公民).

意大利数学家马斯凯罗尼 (Mascheroni) 在 18 世纪能证明了一个惊人的事实: 任一能用无刻度的直尺与圆规的作图也能只用圆规作图. 当然, 我们不能只用圆规作直线, 但是我们能说, 当位于要作的那条直线上的 2 个点可以作图时, 那条直线是确定的. 因此只用 2 把圆规就能把圆 17 等分. 这样的作图称为马斯凯罗尼作图.

当然, 不是所有能作的图可以只用直尺来完成, 因为利用直尺只能使我们完成依据有理运算的作图. 求平方根要求两圆相交或直线与圆相交, 因为求平方根蕴含 2 次方程; 我们已经看出了, 作 2 次方程的根用到圆. 因此最惊人的是, 如果我们容许利用一个有固定圆

心与半径的圆, 那么所有能用直尺与圆规作的图, 也只要用一把直尺就能完成.

为了理解雅可布 · 施泰纳 (Jacob Steiner) 在 19 世纪证明的这个结果有多么惊人, 我们回忆以前求 $\frac{1}{2}b$ 的作图, 其中 $b$ 是已知线段. 在用通常方法作图时, 这个简单的作图用到 2 个独立的圆. 只用直尺作图则需要利用射影几何学定理. 有兴趣的读者可以在《化圆为方与其它专论》(*Squaring the Circle and other Monographs*) 一书中希尔达 · P. 胡德松 (Hilda P. Hudson) 的文章《直尺与圆规》(*Ruler and Compasses*) 中找到直尺作图的讨论.

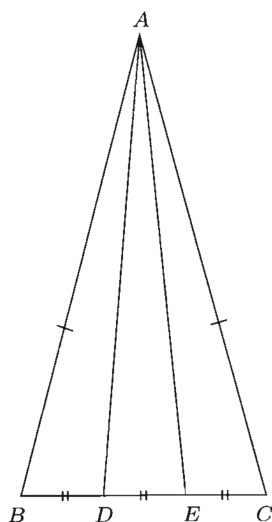



图 22

## 问题 VIII–A 组

学生们经常向他们的几何老师说明下列 3 等分角的方法: 在已知 $\angle A$ 的两边截取相等的线段 $AB$ 与 $AC$. 再把线段 $BC$ 3 等分. 然后作 $AD$ 与 $AE$, 这就 3 等分 $\angle A$.

证明 $AD$ 与 $AE$ 不能 3 等分 $\angle A$.

我希望这个简单的讨论已经向读者说明, 为什么把 "化圆为方与三等分角" 问题的求解认为是具有 "深刻的见解" 与 "对人类知识的巨大贡献"; 为什么解这些看上去简单的问题需要几个世纪的 "大量脑力劳动"; 为了解决这些问题要发展什么新数学.

# 建议进一步阅读的图书

---

*Men of Mathematics*—E. T. Bell

*Development of Mathematics*—E. T. Bell

*What is Mathematics*?—Courant and Robbins

*New First Course in Theory of Equations*—L. E. Dickson

*History of Mathematics* (2 Vol.)— D. E. Smith

*New Mathematical Library*

Volume I—*Numbers, Rational and Irrational*—I. Niven

Volume VI—*Lore of Large Numbers*—P. J. Davis

Volume VII—*Uses of Infinity*—L. Zippen

Volume IX—*Continued Fractions*—C. D. Olds

Volume X—*Graphs and Their Uses*—O. Ore

Volume XII—*Hungarian Problem Book* II

Volume XIII—*Episodes from the Early History of Mathematics*—A. Aaboe

*Scientific American*

April 1961—*Mathematical Games*—M. Gardner

January 1964—*Science and the Citizen—Answers in Set Theory*

*Mathematics Teacher*—December 1960

*The Evolution of Extended Decimal Approximations to $\pi$*—J.W.Wrench

# 更高深的图书

---

*A Survey of Modern Algebra*—Birkhoff and MacLane

*Modern Algebraic Theories*—L.E.Dickson

*The Carus Mathematical Monographs*

*Number* II—*Irrational Numbers*—I.Niven

*Famous Problems and Other Monographs*

1) *Famous Problems of Elementary Geometry*—F. Klein

2) *Three Lectures on Fermat's Last Theorem*—L.J.Mordell

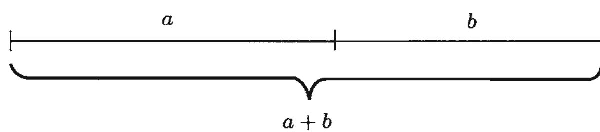
*Squaring the Circle and Other Monographs*

1) *Squaring the Circle*—E. W. Hobson

2) *Ruler and Compass*—H.P.Hudson

# 问题解答

## I–A 组



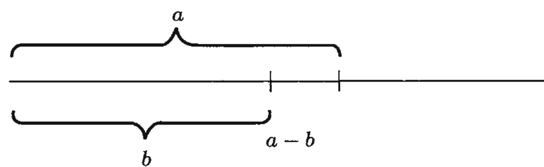




图 23

# I–B 组

1. 因为平行于三角形一边的直线分其它两边成比例线段, 所以我们有 $1/a = b/x$. 因此 $x = ab$.

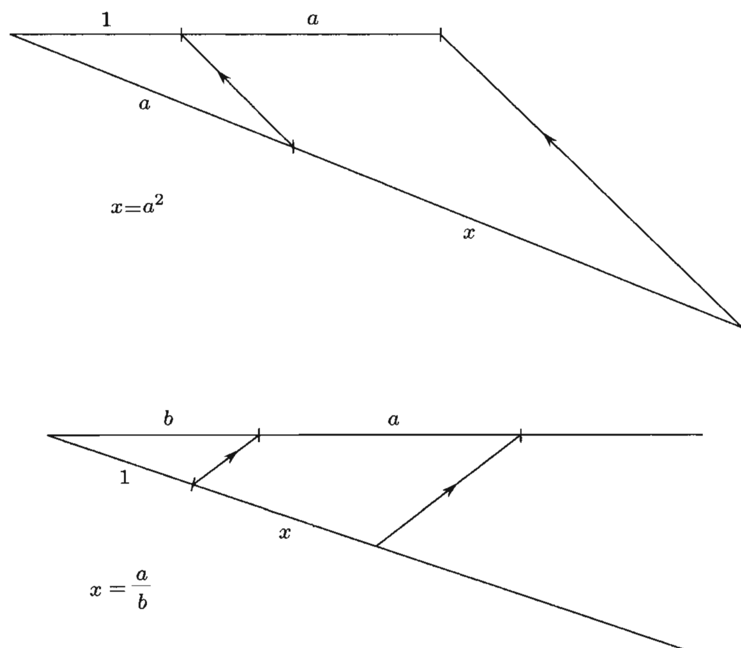



图 24

2. 因为 $b/a = 1/x$, 所以 $bx = a$ 与 $x = a/b$. 为了作 $x = a^2/b$, 先作一线段等于 $a^2$, 后作一线段等于 $a^2/b$.

## I–C 组

1. 作 $LP$ 与 $MP$. 于是 $\triangle LPM$ 是直角三角形, $PM$ 是斜边上的高. 因此 $a/x = x/1$ 与 $x^2 = a$ 或 $x = \sqrt{a}$.

2. 用线段 $a$ 与 $b$ 代替 $a$ 与 1 作直径, 则 $x = \sqrt{ab}$.

为了作 $\sqrt[4]{a}$, 利用 $\sqrt{a}$ 与 1 作直径. 利用 $\sqrt[4]{a}$ 与 1 作 $\sqrt[8]{a}$.

3. 为了作 $\sqrt{2}$, 作一个直角边为 1 与 1 的直角三角形. 为了作 $\sqrt{3}$, 作一个直角边为 $\sqrt{2}$ 与 1 的直角三角形. 为了作 $\sqrt{5}$, 作一个直角边为 2 与 1 的直角三角形. 为了作 $\sqrt{17}$, 作一个直角边为 4 与 1 的直角三角形.

## I–D 组

$x = (c-b)/a$. 先作 $c-b$, 后作 $(c-b)/a$.

## I–E 组

1. 2 次方程的判别式是 $a^2-4b$. 为使根是不相等的实根, 必须 $a^2-4b>0$, 即 $a^2>4b$.

2. 圆的方程是 $(x-b)^2+(y-k)^2=r^2$, 其中圆心是 $(b,k)$, 半径 $=r$. 点 $A$ 的坐标是 $(a/2,(b+1)/2)$, $AB^2 = r^2 = a^2/4+[(b+1)/2-1]^2 = a^2/4+(b-1)^2/4$. 因此 $(x-a/2)^2+(y-(b+1)/2)^2 = a^2/4+(b-1)^2/4$. 为了求 $G$ 与 $F$ 的坐标, 在圆的方程中令 $y=0$, 解出 $x$. 结果是 $x=(a+\sqrt{a^2-4b})/2$ 与 $x=(a-\sqrt{a^2-4b})/2$, 这就是 $x^2-ax+b=0$ 的根.

## I–F 组

以直径 $BD$ 作圆, 其中 $B$ 的坐标是 $(0,1), D$ 的坐标是 $(-1,-1)$.

## II–A 组

(a) 由消去一个未知数或用行列式解方程:

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b},$$
$$y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

(b) 因为 $y = -(ax+c)/b$, 所以

$$x^2 + \left(\frac{-ax-c}{b}\right)^2 + dx + e\left(\frac{-ax-c}{b}\right) + f = 0.$$

用 2 次方程求根公式

$$AX^2 + BX + C = 0,$$

其中

$$A = a^2 + b^2,$$
$$B = 2ac + b^2d - abe,$$
$$C = c^2 - 2bce + b^2f.$$

我们求出 $x = -(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/2A$, 其中 $A, B, C$ 由以上给出. 类似的方法能求出 $y$.

(c) 把 2 个方程相减, 我们求出了经过两圆 2 个交点 (实的或虚的) 的直线方程 $(d-d')x+(e-e')y+(f-f')=0$. 然后我们能用 (b) 的方法求出两圆的交点的坐标.

## II–B 组

1.

$$\frac{7}{5-\sqrt{2}}\cdot\frac{5+\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}=\frac{35+7\sqrt{2}}{23}=\frac{35}{23}+\frac{7}{23}\sqrt{2},$$

$$a=\frac{35}{23},\quad b=\frac{7}{23},\quad k=2.$$

2.

$$\frac{5}{2-\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{2+\sqrt[4]{3}}{2+\sqrt[4]{3}}=\frac{10+5\sqrt[4]{3}}{4-\sqrt[4]{9}}\cdot\frac{4+\sqrt[4]{9}}{4+\sqrt[4]{9}}$$

$$=\frac{40+20\sqrt[4]{3}+10\sqrt[4]{9}+5\sqrt[4]{27}}{13}$$

$$=\left(\frac{40+10\sqrt{3}}{13}\right)+\left(\frac{20+5\sqrt{3}}{13}\right)\sqrt[4]{3},$$

$$a_1=\frac{40+10\sqrt{3}}{13},\quad b_1=\frac{20+5\sqrt{3}}{13},\quad k_1=\sqrt{3}.$$

## II–C 组

1. 令 $x=\sqrt{3+\sqrt[4]{2}}$, $x^2-3=\sqrt[4]{2}$, $(x^2-3)^4=2$,

$$x^8-12x^6+54x^4-108x^2+79=0.$$

方程是不可约的, 因为

(a) $x^2 = 3 + \sqrt[4]{2}$ 有根 $\pm\sqrt{3+\sqrt[4]{2}}$.

(b) 如果令 $y = x^2 - 3$, 那么 $y^4 = 2$ 的根是 2 的 4 次方根. 2 个根是实的无理根, 另 2 个根是虚根.

(c) 因此方程的 8 个根可以表示为 $x = \pm\sqrt{3+p}$, 其中 $p$ 是 2 的 4 次方根. 没有一根是有理数.

2. 首先由 2 与 1 的比例中项作 $\sqrt{2}$. 其次由 $\sqrt{2}$ 与 1 的比例中项作 $\sqrt[4]{2}$. 第三由 $\sqrt[4]{2}$ 与 1 的比例中项作 $\sqrt[8]{2}$. 第四得 $\sqrt[16]{2}$. 最后, 以直角边 $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt[16]{2}$ 作一直角三角形, 作为斜边得出 $\sqrt{3+\sqrt[8]{2}}$.

3. (a) 如果 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 的系数是整数, 那么方程的有理根一定是能整除 $a_n$ 的整数. 方程 $x^3 - 1 = 0$ 有一个有理根 $x = 1$.

(b) 2 的因数是 $\pm1$ 与 $\pm2$. 这些数都不是 $x^3 - 2 = 0$ 的根. 因此 $x^3 - 2 = 0$ 没有有理根.

4. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$, 因此 $x^3 - 1 = 0$ 的根是 $x = 1, x = (-1 \pm \sqrt{-3})/2$.

5. 如果 $r_1$ 是 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的根, 那么 $(x-r_1)$ 是方程左边的因式. 令另一个因式是 $x^2+mx+n$, 那么 $(x-r_1)(x^2+mx+n) = 0$. 2 次方程的解只包含有理运算与求平方根 (原方程的所有根是实根). 因此这些根满足可作图性准则. $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ 的有理根是 $x = 3$. $(x-3)(x^2-4x+2) = 0$. 这个 3 次方程的根是 $3, 2 \pm \sqrt{2}$.

6. 因为 $2+\sqrt{3}$ 是方程

$$(2+\sqrt{3})^3 + a(2+\sqrt{3})^2 + b(2+\sqrt{3}) + c = 0$$

的根, 化简得

$$(26+7a+2b+c)+(15+4a+b)\sqrt{3}=0.$$

因为 $\sqrt{3}$ 是无理数, 所以

$$15+4a+b=0$$

与

$$26+7a+2b+c=0.$$

如果 $2-\sqrt{3}$ 代入方程中的 $x$, 那么得

$$(26+7a+2b+c)-(15+4a+b)\sqrt{3}=0.$$

但是

$$26+7a+2b+c=0$$

与

$$15+4a+b=0.$$

所以 $2-\sqrt{3}$ 也是方程的根, 如果第 3 个根用 $r$ 表示, 则

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+r=-a,$$
$$r=-a-4.$$

$r$ 是有理根.

## III–A 组

$a=0,\ b=1;\ a=0,\ b=-1.$

## III–B 组

1. 当且仅当 $a=c, b=d$ 时 $(a,b)=(c,d)$,

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

2. 一个解是 (0,1),

$$(0,1)\times(0,1)=([0-1],[0+0])=(-1,0),$$

$$(-1,0)+(1,0)=(0,0).$$

另一个解是 $(0,-1)$.

## III–C 组

1.

$$\begin{aligned}
&r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\
=&r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\\
&+i([\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1,\sin\theta_2])\\
=&r_1r_2(\cos[\theta_1+\theta_2]+i\sin[\theta_1+\theta_2]).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\cdot\frac{(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}\\
=&\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\
=&\frac{r_1}{r_2}(\cos[\theta_1-\theta_2]+i\sin[\theta_1-\theta_2]).
\end{aligned}$$

## III–D 组

1. 与 2.

$$
\begin{aligned}
(\cos x + i\sin x)^3 &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x \\
&\quad -3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\
&= \cos 3x + i\sin 3x, \\
\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x, \\
\sin 3x &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \\
&= 3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x.
\end{aligned}
$$

## III–E 组

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = x_2, \\
R_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = x_3, \\
R_3 &= \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3} = 1 = x_1.
\end{aligned}
$$

## III–F 组

$$x_3 = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \omega^2,$$
$$x_1 = \omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1.$$

如果以 $R_1$ 表示 1 的负平方根, 那么 $R_2 = 1 = R_1^2$.

## III–G 组

1.

$$R = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7},$$
$$R^2 = \cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R^7 = \cos\frac{14\pi}{7} + i\sin\frac{14\pi}{7} = 1.$$

2. (a) $R^3 \cdot R^6 = R^9 = R^2$.

(b) $R^5$ 之逆为 $R^2$, 因为 $R^5 \cdot R^2 = R^7 = 1$.

(c)

$$R^2 = \cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7},$$
$$\frac{1}{R^2} = \cos\frac{4\pi}{7} - i\sin\frac{4\pi}{7},$$
$$R^2 + \frac{1}{R^2} = 2\cos\frac{4\pi}{7}.$$

3.

$$r = R, \quad a = 1,$$
$$S = \frac{R^n - 1}{R - 1}.$$

## IV–A 组

1. 如果 $b = 2a$, 那么 $y^2 = bx = 2ax$, 又因为 $x^2 = ay$, 所以 $y = x^2/a, x^4/a^2 = 2ax$ 或 $x^3 = 2a^3$.

2. $x^2 = ay$ 与 $y^2 = bx$ 的图像是抛物线. 虽然抛物线的单个点能用直尺与圆规作出, 但是整个图像, 特别是 2 条抛物线的交点, 不能用直尺与圆规作出.

3. 因为 $x^2 = ay, y = x^2/a$, 所以

$$xy = \frac{x^3}{a} = ab.$$

但是 $b = 2a$, 因此 $x^3 = a^2b = 2a^3$.

## IV–B 组

1. 问题是已知一线段 $a$, 求作一线段 $x$, 使得 $x^2 = 2a^2$, 即 $2a/x = x/a$, 作 $2a$ 与 $a$ 的比例中项.

2. (a) 方程是 $4\pi x^2 = 2(4\pi)$. 因此 $x^2 = 2$, 能作图.

(b) $\dfrac{4\pi x^3}{3} = \dfrac{8\pi}{3}$, $x^3 = 2$, 不能作图.

## V–A 组

1. $OD$ 是 $\cos A$.

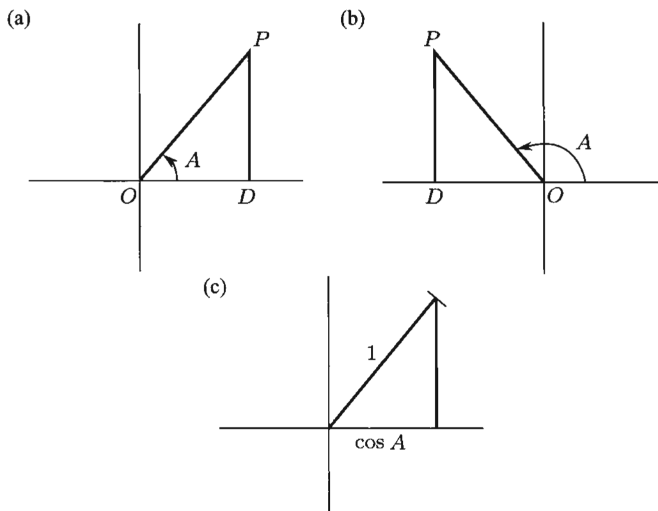



图 25

2. (a) 如果 $3\theta = 90°$, 那么 $\theta = 30°$, 方程变成 $x^3 - 3x = 0$, $(x = 2\cos\theta)$. 因为方程有有理根 $x = 0$, 所以它是可约 3 次方程, 它的根能作图, 即能三等分 90° 角.

(b) 对于 $3\theta = 120°$, 方程是不可约 3 次方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$. 不能三等分 120° 角.

(c) 对于 $3\theta = 180°$, 方程是可约 3 次方程 $x^3 - 3x + 2 = 0$ (一根是 $x = 1$. 能三等分 180° 角).

## V–B 组

1. 令 $\angle D = y°$. 作 $OE$, 则 $\angle DOE = y°, \angle BEO = 2y°$. 又 $\angle B = 2y°$, 则 $\angle AOB = 3y°$ 或 $\angle D = \frac{1}{3}\angle AOB$.

2. 为了作直线 $DEB$, 使 $DE$ 等于圆半径, 要求在

直尺上画 2 个标记 (直尺应该没有标记).

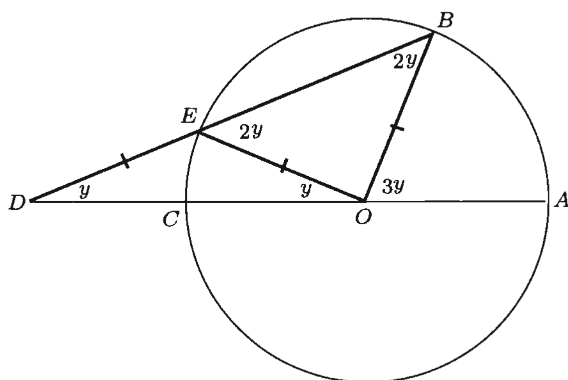



图 26

## V–C 组

1. 利用无穷等比数列求和公式, 其中首项 $a=\frac{1}{4}$, 公比 $q=\frac{1}{4}$, 得

$$S=\frac{1}{4}\Big/\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\Big/\frac{3}{4}=\frac{1}{3}.$$

2. 只允许有限次使用圆规与直尺. 这个方法要求无限次平分已知角.

## VI–A 组

1. 作 $DG$ 与 $GF$. 因为 $GE$ 是直角三角形 $DGF$ 斜边上的高, 所以

$$\frac{b}{x}=\frac{x}{a},\quad 即\quad x^2=ab.$$

2. $\triangle DCB$ 与 $\triangle DFB$ 有同一底边 $DB$ 与相等的高, 因此 $S\triangle DCB = S\triangle DFB$. 又 $S$ 四边形 $ABCD = S\triangle ABD + S\triangle DCB$. 于是 $S$ 四边形 $ABCD = S\triangle ABD + S\triangle DFB = S\triangle AFD$.

3. (a) 首先作一个三角形使面积等于已知四边形, 其次作 $x$, 它是 $\frac{1}{2}b$ 与 $h$ 的比例中项, 其中 $b$ 与 $h$ 分别是这个三角形的底边与高.

(b) 令 $ABCDE$ 是已知 5 边形. 作对角线 $DB$ 与 $DA$. 作 $CG//DB$ 与 $EF//DA$. ($F$ 与 $G$ 在 $AB$ 的延长线上.) 作 $DF$ 与 $DG$. 现在证明 $\triangle DFG$ 面积 = 五边形 $ABCDE$ 面积. 作一个正方形使面积等于 $\triangle DFG$ 的面积. 这个方法可以推广到作一个正方形使面积等于任一已知多边形的面积.

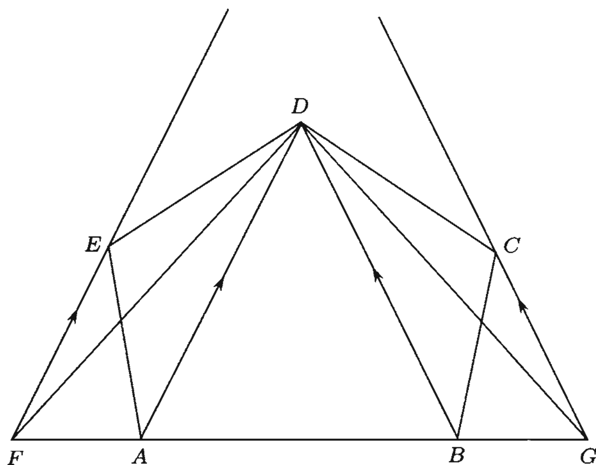



图 27

## VI–B 组

1. (a) 令 $s_n$ = 圆内接正 $n$ 边形的边长; $S_n$ = 圆外切正 $n$ 边形的边长; $p_n$ = 圆内接正 $n$ 边形的周长, $P_n$ = 圆外切正 $n$ 边形的周长, 则

$$s_4=\sqrt{2},\quad S_4=2.$$
$$p_4=4\sqrt{2}=4(1.414)=5.66,$$
$$P_4=8,$$
$$5.66\leqslant 2\pi\leqslant 8,$$
$$2.83\leqslant \pi\leqslant 4.$$

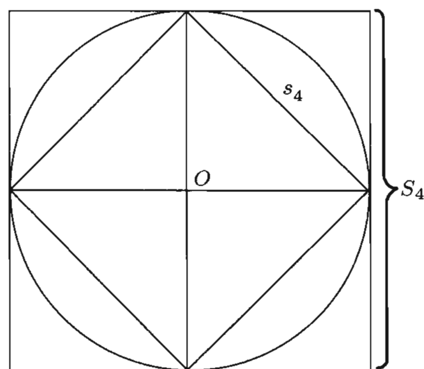



图 28

(b) 由余弦定理

$$s_8^2=1+1-2\cos 45^\circ=2-\sqrt{2},$$
$$s_8=\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$p_8 = 8\sqrt{2-\sqrt{2}} = 8 \times 0.72 = 5.76,$$
$$S_8 = 2\tan\frac{45^\circ}{2}.$$

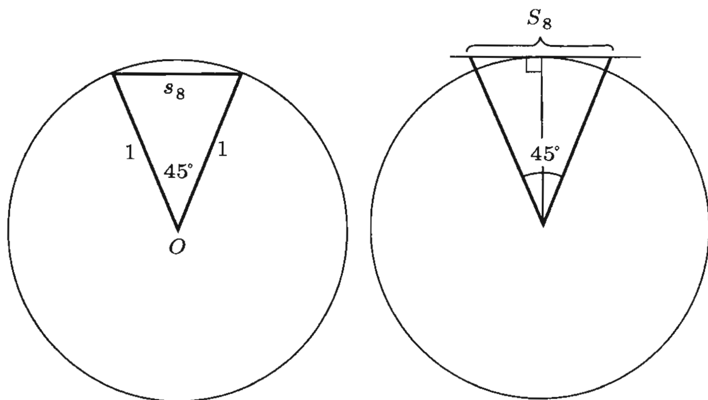



图 29

因为 $\tan\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$, 所以

$$\tan\frac{1}{2}45^\circ = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1,$$
$$P_8 = 16\left(\sqrt{2}-1\right) = 16(0.414) = 6.62,$$
$$2.88 \leqslant \pi \leqslant 3.31.$$

2. $3\frac{1}{7} = 3.\dot{1}4285\dot{7}$

3. 设 $x = 3.\dot{1}\dot{4}$,

$$100x = 314.\dot{1}\dot{4},$$
$$99x = 311,$$
$$x = \frac{311}{99}.$$

## VI–C 组

1. 作 $OC, CD, DA, CA$

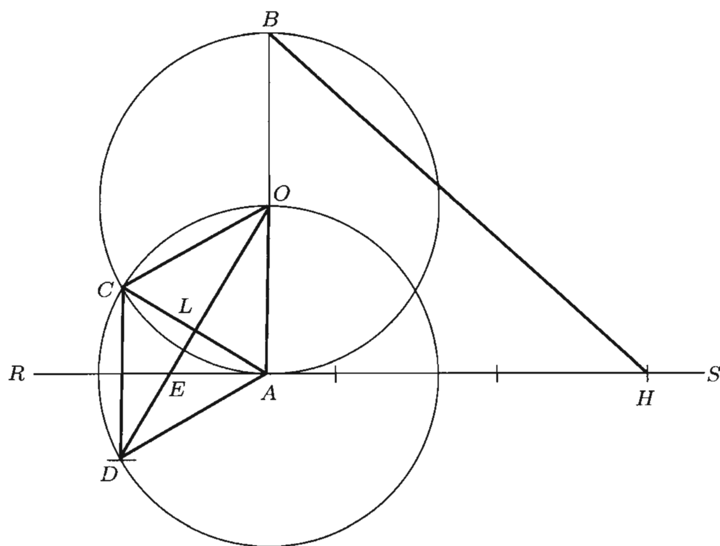



图 30

$OCDA$ 是菱形,

$$\angle COA = 60^\circ, \quad \angle CAE = 30^\circ.$$

$$OD \perp CA,$$

所以 $EA = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$AH = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad AB = 2.$$

由勾股定理,

$$BH = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}.$$

2. $BH = 3.14153$, $\pi = 3.14159$, 误差大约为 0.00006.

## VI–D 组

1.

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$= 0.523 - 0.024 = 0.499.$$

由计算, $\sin\pi/6$ 约等于 0.50,

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5000.$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = 1 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 0.137 = 0.863,$$

由计算 $\cos\pi/6$ 约等于 0.86

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660.$$

2.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!},$$
$$e = 2 + 0.5 + 0.167 + 0.042 = 2.709,$$

$e$ 约等于 2.71.

## VI–E 组

$$x = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}},$$
$$x^2 = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3},$$
$$3x^2 - 40 = -6\sqrt{3},$$
$$9x^4 - 240x^2 + 1492 = 0.$$

## VII–A 组

1. (a) 连接 2 条垂直直径的端点, 作一个正方形. 平分正 $n$ 边形的各边, 将给出正 $2n$ 边形的顶点.

(b) 利用圆半径把圆周 6 等分, 作一个正 6 边形. 连接这个 6 边形交错的顶点.

(c) 见 (a) 部分.

2. (a) 见 1 (b).

(b) 见 1 (b).

(c) 见 1 (a).

3. 对于 $k = 2$ 与 $l = -1$, $3k + 5l = 1$. 于是我们能作 $2\pi/3$ 与 $2\pi/5$ 的圆心角, 还能作 $2\pi\left(\frac{1}{3}\right)$ 与 $2\pi\left(\frac{2}{5}\right)$ 的角, 然后能作 $2\pi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) = 2\pi/15$ 的角, 这是正 15 边形的圆心角.

4. (a) 因为 3 不与本身互素, 所以这个定理没有给我们关于正 $3 \times 3$ 边形即正 9 边形的信息. 但是正 9 边

形的圆心角是 40°, 并且我们已经证明了不能平分这个角.

(b) 命题不成立. 能作正 5 边形与正 4 边形. 整数 4 与 5 互素, 但不能作正 9 边形.

## VII–B 组

1. 作一个单位半径 (任意合适的半径) 的圆. 把这条半径分为中外比, 即作 $x$ 使 $x=(\sqrt{5}-1)/2$. 利用 $x$ 作为正 10 边形的一边. 最后连接间隔的点.

2.

$$\angle 1=\angle 2,$$

$$\angle 1=\angle 3, \angle 2=\angle 4,$$

所以

$$\angle 3=\angle 4.$$

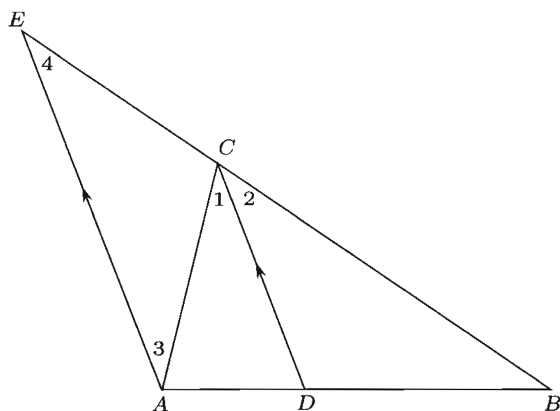



图 31

并且

$$AC = EC.$$

而

$$\frac{EC}{CB} = \frac{AD}{DB},$$

所以

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$$

## VII–C 组

1. 展开

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

于是

$$x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x$$
$$-r_1r_2r_3 \equiv x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

当 2 个多项式恒等时, 对应项的系数相等 ($n$ 次方程不能有多于 $n$ 个根; 而在恒等式中 $x$ 的任一允许值将使方程成立). 使同类项的系数相等, 就给出根与系数之间所要求的关系.

2. 利用相同的方法. 这个方法可以应用于 $n$ 次方程.

# VII–D 组

1. 因为 $y_1 + y_2 = -1$ 与 $y_1 \cdot y_2 = -1$, 所以 $y_1$ 与 $y_2$ 满足方程 $y^2 + y - 1 = 0$.

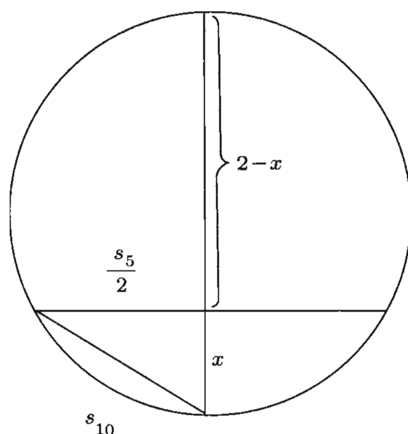



图 32

2. 因为 $OC = 1/2, OB = 1, BC = \sqrt{5}/2, CD = \sqrt{5}/2$ 与 $OD = (\sqrt{5} - 1)/2 = s_{10}$. 为了证明 $s_5 = BD$, 我们有 $s_5^2/4 + x^2 = s_{10}^2$, 又有 $2x - x^2 = s_5^2/4$ 所以 $x = s_{10}^2/2$. 与

$$s_5^2 + s_{10}^4 = 4s_{10}^2,$$

$$s_5^2 = s_{10}^2(4 - s_{10}^2),$$

$$s_{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad s_{10}^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

于是

$$s_5^2 - 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = s_{10}^2,$$

所以

$$s_5^2 = 1 + s_{10}^2,$$

或

$$s_5 = BD.$$

## VII–E 组

1.

$$R^3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \omega,$$
$$R^6 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \omega^2,$$

其中 $\omega$ 是 1 的立方根

所以

$$R^3 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad R^6 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

2.

$$\begin{aligned} & y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 \\ &= 3(R^3 + R^6) + (R + R^2 + R^4 + R^5 + R^7 + R^8) \\ &= 3(-1) + 0. \end{aligned}$$

因为 $R^3, R^6$ 是 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根, 所以

$$\begin{aligned} y_1y_2y_3 &= (R^3 + R^6) + (R + R^2 + R^4 + R^5 + R^7 + R^8) \\ &= -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

3. 三等分一个 120° 角等价于作一个 40° 角. 正 9 边形的边对着外接圆 40° 圆心角.

## VII–F 组

作真正的除法.

## VII–G 组

1. 如果 $g = 2$, 那么我们得出以下序列: $R, R^2, R^4, R^8, R^{16}, R^{32}(= R^{15}), R^{30}(R = R^{13}), R^{26}(= R^9), R^{18} = R$, 这个序列将继续 $R^2, R^4$ 等等. 不是割圆方程所有根都在这个序列中.

2. 每一项都是前一项的立方. 当 $R$ 的指数变为大于 16 时, 从这个指数减去 17. 这等价于这一项除以 1, 因为 $R^{17} = 1$.

## VII–H 组

1. 因为 $y^2 + y - 4 = 0$ 与 $y_1 > 0$, 所以

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad 与 \quad y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

还有

$$z^2 - y_1 z - 1 = 0 \quad 与 \quad z_1 > 0,$$

因此

$$z_1 = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2+4}}{2} = \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2}.$$

最后,

$$w^2 - y_2 w - 1 = 0 \quad 与 \quad w_1 > 0,$$

因此

$$w_1 = \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2}.$$

2. (a) $\overline{OE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{OA}^2 = \frac{1}{16} + 1$, $\overline{OE} = \frac{1}{4}\sqrt{17}$.

(b) $\overline{AF} = \overline{EF} - \overline{EA} = \overline{OE} - \overline{EA} = \frac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}y_1$.

(c) 类似地

$$\overline{AF'} = \overline{EF'} + \overline{AE} = \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}y_2.$$

(d)

$$\overline{OF}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AF}^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}y_1\right)^2,$$

$$\overline{OF} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2},$$

$$\overline{OF'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AF'}^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}y_2\right)^2,$$

$$\overline{OF'} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2}.$$

(e)

$$\begin{aligned}\overline{AH} = \overline{AF} + \overline{FH} &= \frac{1}{2}y_1 + \overline{OF} \\ &= \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2} = z_1.\end{aligned}$$

(f)

$$\overline{AH'}=\overline{F'H'}-\overline{F'A}=\overline{F'O}-\left(-\frac{1}{2}y_2\right)$$
$$=\sqrt{1+\frac{1}{4}y_2^2}+\frac{1}{2}y_2=w_1.$$

3. 圆的方程是

$$\left(x-\frac{z_1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{w_1+1}{2}\right)^2=\left(\frac{z_1}{2}\right)^2+\left(\frac{w_1-1}{2}\right)^2,$$

因此点 $G$ 与 $F$ 的横坐标可由下列方程得出:

$$\left(x-\frac{z_1}{2}\right)^2+\left(\frac{w_1+1}{2}\right)^2=\left(\frac{z_1}{2}\right)^2+\left(\frac{w_1-1}{2}\right)^2,$$

或

$$x^2-z_1x+w_1=0.$$

但是 $v_1$ 与 $v_2$ 满足方程

$$v^2-z_1v+w_1=0 \quad 与 \quad v_1>v_2>0.$$

因此

$$OF=v_1\left(=\frac{z_1+\sqrt{z_1^2-4w_1}}{2}\right).$$

还有

$$v_1=R+\frac{1}{R}=\cos\frac{2\pi}{17}.$$

因此 $OF=2\cos\dfrac{2\pi}{17}$.

4. $\overline{OM}=\dfrac{1}{2}OF=\cos\dfrac{2\pi}{17}$,

因为圆半径为 1, 所以

$$\angle MOP = \frac{2\pi}{17}.$$

5. 按正文中的方法去解.

## VII–I 组

| $n=$ | $\frac{2^m}{4}$ | $\frac{3\cdot 2^m}{3}$ | $\frac{5\cdot 2^m}{5}$ | $\frac{17\cdot 2^m}{17}$ | $\frac{15\cdot 2^m}{15}$ | $\frac{51\cdot 2^m}{51}$ | $\frac{85\cdot 2^m}{85}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 34 | 30 | | |
| | 16 | 12 | 20 | 68 | 60 | | |
| | 32 | 24 | 40 | | | | |
| | 64 | 48 | 80 | | | | |
| | | 96 | | | | | |
| 合计 | 5 | 6 | 5 | 3 | 3 | 1 | 1 |

能作边数 $\leqslant 100$ 的 24 个正多边形.

## VII–J 组

1. $2^{10} = 1024$.

$$\lg 2^{2^{10}} = 1024 \lg 2 = 1024(0.301) = 308.224.$$

因此 $2^{2^{10}}+1$ 有 309 个数字.

2. 我们能作正 12 边形与正 15 边形. 因此我们能作 $30^\circ$ 与 $24^\circ$ 的角. 能作这 2 个角的差. 最后能平分

6° 角以作出 3° 角. 我们不能作 2° 角. 因为, 如果能作 2° 角, 那么能作 1° 角与 1° 的任意倍数的角; 特别能作 40° 角. 但是不能作正 9 边形. 因此能作图的角有一个最小度数, 这个度数是 3°.

## VIII–A 组

如果 $AB = AC, \angle B = \angle C$, 那么 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

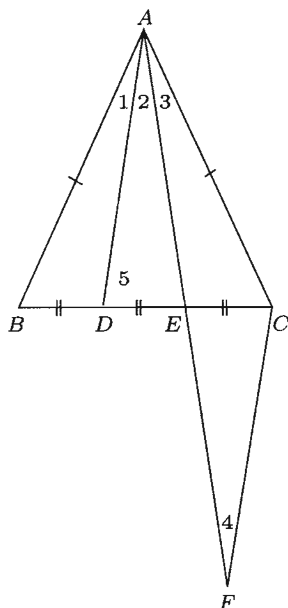



图 33

与 $\angle 1 = \angle 3$.

设 $\angle 2 = \angle 3$.

延长 $AE$ 至 $F$, 作 $CF$.

$$\triangle ADE \cong \triangle FCE, \quad \text{与} \quad \angle 2 = \angle 4,$$

所以

$$\angle 3 = \angle 4 \quad \text{与} \quad AC = CF.$$

又因为 $AD = CF, AD = AC,$
所以

$$\angle 5 = \angle C = \angle B.$$

但是 $\angle 5 > \angle B$
所以假设 $\angle 2 = \angle 3$ 不成立.